1. **Cas $n = 2$:** $\mathfrak{S}_2$ est un groupe d'ordre 2. Tout automorphisme de $\mathfrak{S}_2$ envoie Id sur Id et est une bijection donc $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_2)$ est le groupe trivial.
2. **Automorphismes intérieurs :** h est surjective par définition de $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$.
   Soit $\sigma \in \ker h$. C'est à dire $h_\sigma = Id$.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\gamma_i = (1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$. Alors $\operatorname{Supp} \gamma_i = [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$.
   $\gamma_i = h_\sigma(\gamma_i) = (\sigma(1)\sigma(2) \dots \sigma(i-1)\sigma(i+1) \dots \sigma(n))$.
   Donc $[\![1, n]\!] \setminus \{i\} = \operatorname{Supp} \gamma_i = \operatorname{Supp} h_\sigma(\gamma_i) = [\![1, n]\!] \setminus \{\sigma(i)\}$. On en déduit $i = \sigma(i)$.
   Vrai pour tout i, donc $\sigma = Id$. $\ker h = \{Id\}$ et donc h est bijective. $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$.
3. **Cas classique :** Soit ϕ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ qui transforme une transposition en une transposition.
   (a) Par hypothèse, $\phi((12))$ et $\phi((13))$ sont des transpositions.
   Si $\phi((12))$ et $\phi((13))$ sont à supports disjoints elles commutent. Or (12) et (13) ne commutent pas : $(12)(13) = (132) \neq (123) = (13)(12)$. Donc $\phi((12))$ et $\phi((13))$ ne sont pas à supports disjoints. Comme ϕ est bijective $\phi((12))$ et $\phi((13))$ sont différentes. Donc leurs supports ont exactement un élément en commun, noté a_1. De plus $a_2 \neq a_3$ car ϕ est bijective.
   (b) $\phi^{-1}((a_2a_3)) = \phi^{-1}((a_1a_2).(a_1a_3).(a_1a_2)) = (12)(13)(12) = (23)$.
   (c) Soit $i \in [\![4, n]\!]$.
   $\phi((12))$ et $\phi((1i))$ ne commutent pas (car images par ϕ d'éléments ne commutant pas), donc ne sont pas à support disjoints. De même, $\phi((1i))$ et $\phi((13))$ ne sont pas à support disjoints.
   Si a_1 n'est pas dans le support de $\phi((1i))$, alors a_2 et a_3 y sont, et comme ϕ envoie une transposition sur une transposition, $\phi((1i)) = (a_2a_3)$ et par la question précédente, $(1i) = \phi^{-1}(\phi((1i))) = (23)$, ce qui est absurde. Donc a_1 est dans le support de $\phi((1i))$ et il existe donc a_4 tel que $\phi((1i)) = (a_1a_4)$.
   (d) Si $s(i) = s(j)$, alors $\phi((1i)) = \phi((1j))$. Comme ϕ est un automorphisme, $(1i) = (1j)$, et donc $i = j$.
   s est donc injective sur un ensemble fini, donc est bijective.
   (e) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On pose $\gamma = s \circ (1i) \circ s^{-1} \in \mathfrak{S}_n$.
   $\gamma(a_1) = (s \circ (1i))(1) = s(i) = a_i$.
   De même, $\gamma(a_i) = a_1$.
   Si $j \notin \{1, i\}$, alors $\gamma(j) = (s \circ (1i))(j) = s(j) = a_j$.
   Donc $\gamma = (a_1a_i)$. On a montré que ϕ et la conjugaison par s coïncident sur $\{(1i),\quad i \in [\![1, n]\!]\}$, qui est un ensemble engendrant $\mathfrak{S}_n$, donc ϕ est la conjugaison par s.
4. **Où vont les transpositions ?**
   (a) Soit $\sigma \in A_i^n$. On l'écrit en produit de transpositions à supports disjoints : $\sigma = (j_1j_2) \dots (j_{2i-1}j_{2i})$.
   Pour tout $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, $\gamma\sigma\gamma^{-1} = (\gamma(j_1)\gamma(j_2)) \dots (\gamma(j_{2i-1})\gamma(j_{2i}))$. Comme γ est une bijection, les $(\gamma(j_{2k-1})\gamma(j_{2k}))$ sont à supports disjoints et donc $\gamma\sigma\gamma^{-1} \in A_i^n$. A_i^n est donc stable par conjugaison.
   Réciproquement, si $\gamma = (k_1k_2) \dots (k_{2i-1}k_{2i}) \in A_i^n$.
   On complète $\operatorname{Supp} \sigma$ avec des éléments $j_{2i+1}, \dots, j_n$ de manière à ce que $[\![1, n]\!] = \{j_l \mid l \in [\![1, n]\!]\}$. De même, on complète $\operatorname{Supp} \gamma$ avec des éléments $k_{2i+1}, \dots, k_n$ de manière à ce que $[\![1, n]\!] = \{k_l \mid l \in [\![1, n]\!]\}$.

Alors, en posant $\delta : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ j_l & \mapsto & k_l \end{array}$, $\delta \in \mathfrak{S}_n$ et $\delta\sigma\delta^{-1} = \gamma$, donc γ est dans la classe de conjugaison de σ.

A_i^n est donc bien une classe de conjugaison.

(b) Remarque préliminaire :

$$\begin{aligned} x \text{ et } y \text{ conjugués} &\Leftrightarrow \exists h,\quad x = hyh^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists h,\quad \phi(x) = \phi(h)\phi(y)\phi(h)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists h',\quad \phi(x) = h'\phi(y)h'^{-1} \\ &\Leftrightarrow \phi(x) \text{ et } \phi(y) \text{ conjugués} \end{aligned}$$

Donc ϕ envoie une classe de conjugaison sur une classe de conjugaison.

ϕ étant un automorphisme, ϕ préserve l'ordre. Les éléments d'ordre 2 sont les produits de transpositions à supports disjoints. En effet, l'ordre d'un élément est le ppcm des longueurs des cycles apparaissant dans sa décomposition en cycles disjoints.

Donc $\phi(A_i^n)$ est une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2, c'est à dire un A_j^n. En notant que $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$, celui-ci est forcément préservé par ϕ, ce qui signifie que ϕ préserve la signature et implique que j est impair.

(c) Pour choisir un élément σ de A_i^n, il faut choisir $n-2i$ points fixes. Soit $\binom{n}{n-2i}$ choix. Ensuite, on a $2i-1$ choix pour l'image du plus petit des éléments de $\operatorname{Supp}\sigma$. Cela fixe la première des i tranpositions.

Reste $2i-2$ points dont il faut choisir l'image. On a $2i-3$ possibilités pour l'image du plus petit de ces points.

$\vdots$

D'où $Card(A_i^n) = \binom{n}{n-2i} \times (2i-1) \times (2i-3) \times \cdots \times 1$.

(d) Si $n \leq 5$, le seul j impair inférieur à $n/2$ est 1, donc $\phi(A_1^n) = A_1^n$ par (4.b).

Pour $n \geq 7$, on commence par remarquer que $Card(A_1^n) = \binom{n}{2}$. Soit i tel que $Card(A_1^n) = Card(A_i^n)$.

Supposons que $i \neq 1$. Alors $i \in \{2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$.

On va étudier deux cas selon la parité de n.

Cas n impair : Si $i \neq \frac{n-1}{2}$, alors $\binom{n}{n-2i} > \binom{n}{2}$ et donc $Card(A_1^n) < Card(A_i^n)$. Absurde, donc $i = \frac{n-1}{2}$.

Si $i = \frac{n-1}{2}$, l'égalité $Card(A_1^n) = Card(A_i^n)$ se réécrit :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-1}(n-2)(n-4)\cdots \times 3 \times 1$$

$$\frac{(n-1)}{2} = (n-2)(n-4)\cdots \times 3 \times 1$$

Or pour $n \geq 7$, $n-2 > \frac{n-1}{2}$. Absurde, donc $i = 1$.

Cas n pair : Si $i < \frac{n}{2} - 1$, alors $\binom{n}{n-2i} > \binom{n}{2}$ et donc $Card(A_1^n) < Card(A_i^n)$. Absurde, donc $i = \frac{n}{2}$ ou $i = \frac{n}{2} - 1$.

Si $i = \frac{n}{2}$, l'égalité $Card(A_1^n) = Card(A_i^n)$ se réécrit :

$$\frac{n(n-1)}{2} = (n-1)(n-3)\cdots \times 3 \times 1$$

$$\frac{n}{2} = (n-3)(n-5)\cdots \times 3 \times 1$$

Pour $n \geq 8$, on a $(n-3) > n/2$. Absurde, donc $i = \frac{n}{2} - 1$.
Dans ce cas, l'égalité $Card(A_1^n) = Card(A_i^n)$ se réécrit :

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}(n-3)\cdots \times 3 \times 1$$

$$1 = (n-3)(n-5)\cdots \times 3 \times 1$$

Absurde, donc $i = 1$.

(e) La partie 3 montrait que tout automorphisme envoyant les transpositions sur les transpositions est intérieur. On vient justement de montrer que si $n \neq 6$, tout $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ vérifie $\phi(A_1^n) = A_1^n$. La partie 2 montrait que $\mathfrak{S}_n \simeq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$. Tout cela permet donc de conclure que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathfrak{S}_n$.

(f) Lorsque $n = 6$, $Card(A_1^n) = 15 = Card(A_3^n)$. Il pourrait donc exister un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$ envoyant A_1^n sur A_3^n, c'est à dire envoyant les transpositions sur les triples transpositions. Un tel automorphisme ne serait pas intérieur, car un automorphisme intérieur envoie une transposition sur une transposition.

5. **Le cas exceptionnel de $\mathfrak{S}_6$**

(a) **Existence d'un automorphisme non-intérieur**

i. Notons X l'ensemble à 6 éléments sur lequel on fait agir $\mathfrak{S}_6$.
$\ker\rho \lhd \mathfrak{S}_6$, donc $\ker\rho = \mathfrak{S}_6, \mathfrak{A}_6$ ou $\{Id\}$. Par la relation orbite-stabilisateur, on sait que pour tout $x \in X$, $|\mathrm{Stab}(x)| = \frac{|\mathfrak{S}_6|}{|\Omega(x)|}$. L'action est supposée transitive, donc l'orbite est de cardinal 6. Donc $|\mathrm{Stab}(x)| = 5!$.
En se rappelant que $\ker\rho = \cap_{x\in X} Stab(x)$, on en déduit que $|\ker\rho| \leq 5!$, donc $\ker\rho$ est trivial. ρ est donc injective, puis bijective par égalité des cardinaux.

ii. Un automorphisme ρ de $\mathfrak{S}_6$ est une action $\mathfrak{S}_6$ sur $[\![1,6]\!]$. Comme c'est une bijection, pour tout i, j dans $[\![1,6]\!]$, il existe un $\gamma \in \mathfrak{S}_6$ tel que $\rho(\gamma) = (ij)$. Alors $\gamma.i = j$, ce qui prouve bien que l'action est transitive.

iii. Soit ρ un automorphisme intérieur de $\mathfrak{S}_6$. Alors $\rho = h_\sigma$, c'est à dire est la conjugaison par un certain $\sigma \in \mathfrak{S}_6$.
$\mathrm{Stab}_\rho(x) = \left\{\gamma \in \mathfrak{S}_6 \mid \sigma\gamma\sigma^{-1}(x) = x\right\} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma^{-1}(x)) = \Sigma_{\sigma^{-1}(x)}$.

iv. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ et $i \in [\![1,6]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sigma\Sigma_i\sigma^{-1} &= \left\{\sigma\gamma\sigma^{-1} \mid \gamma \in \mathfrak{S}_n,\ \gamma(i) = i\right\} \\
&= \left\{\sigma\gamma\sigma^{-1} \mid \gamma \in \mathfrak{S}_n,\ \gamma\sigma^{-1}\sigma(i) = i\right\} \\
&= \left\{\sigma\gamma\sigma^{-1} \mid \gamma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma\gamma\sigma^{-1}\sigma(i) = \sigma(i)\right\} \\
&= \{\delta \mid \delta \in \mathfrak{S}_n,\ \delta\sigma(i) = \sigma(i)\} \\
&= \Sigma_{\sigma(i)}
\end{aligned}$$

Donc les conjugués de Σ_i sont des Σ_j.
Réciproquement, si i et j sont dans $[\![1,6]\!]$, alors $\Sigma_i = (ij)\Sigma_j(ij)$, donc tous les Σ_j sont des conjugués de Σ_i. Cela montre que $\{\Sigma_i, i \in [\![1,6]\!]\}$ est une classe de conjugaison de l'ensemble des sous-groupes d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$.

v. Supposons qu'il existe un H sous-groupe d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ qui n'est pas un Σ_i.

On fait agir $\mathfrak{S}_6$ par translation sur $\mathfrak{S}_6/H$. C'est une action transitive sur un ensemble à 6 éléments, donc elle fournit un automorphisme $\rho : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$ par la question (5.a.i).

$H = \text{Stab}_\rho(Id.H)$. Si ρ était intérieur, par la question (5.a.iii), H serait un Σ_i. Absurde par hypothèse, donc ρ est un automorphisme non-intérieur de $\mathfrak{S}_6$ par (5.a.iv).

vi. Comptons les 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$: $n_5 \equiv 1[5]$ et $n_5 \mid 24$. Il ne peut pas y avoir qu'un seul 5-Sylow, sinon celui-ci serait distingué et cela contredirait que $\mathfrak{A}_5$ est simple. Donc $n_5 = 6$.

On fait agir $\mathfrak{S}_5$ par conjugaison sur ses 5-Sylow. En numérotant les 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$ par les entiers de 1 à 6, cela donne un morphisme $\alpha : \mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_6$.

Les 5-Sylow étant tous conjugués, l'action est transitive, donc $[\mathfrak{S}_5 : \ker \alpha] \geq 5$.

Les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_5$ étant $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{A}_5$ et $\{Id\}$, on a forcément $\ker \alpha = \{Id\}$. Donc α est injective et $\alpha(\mathfrak{S}_5)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ d'indice 6 ne fixant aucun point de $[\![1, n]\!]$, donc n'est pas un Σ_i.

Conclusion : Il existe un automorphisme non-intérieur de $\mathfrak{S}_n$. Comme $\text{Int}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathfrak{S}_n$, cela montre bien que $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n) \not\simeq \mathfrak{S}_n$.

(b) **Structure de** $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$

i. Soit ϕ un automorphisme non-intérieur de $\mathfrak{S}_6$. ϕ^{-1} n'est alors pas intérieur non plus. Soit $\phi_1 \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_6) \setminus \text{Int}(\mathfrak{S}_6)$. Alors par la question (4.f), on a forcément $\phi_1(A_1^6) = \phi^{-1}(A_1^6) = \phi(A_3^6)$.

De même, $\phi^{-1}(A_3^6)$ doit être une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2 et de signature 1. Donc forcément $\phi^{-1}(A_3^6) = A_1^6$.

On en déduit que $\phi_1 \circ \phi^{-1}(A_1^6) = A_1^6$. Donc $\phi_1 \circ \phi^{-1}$ envoie une transposition sur une transposition. Par la question 3, c'est donc un automorphisme intérieur de $\mathfrak{S}_6$.

Donc il existe h_σ un automorphisme intérieur tel que $\phi_1 = \phi \circ h_\sigma$. La translation par ϕ réalise donc une bijection entre $\text{Int}(\mathfrak{S}_6)$ et $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6) \setminus \text{Int}(\mathfrak{S}_6)$, ce qui signifie bien que $\text{Int}(\mathfrak{S}_6)$ est d'indice 2 dans $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$.

ii. Un automorphisme préserve l'ordre donc l'image d'un 5-cycle par un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$ est un élément d'ordre 5. Or les seuls éléments d'ordre 5 dans $\mathfrak{S}_6$ sont les 5-cycles. En effet, dans la décomposition d'un élément d'ordre 5 en produit de cycles disjoints, il doit y avoir un élément dont l'ordre divise 5. La seule possibilité est que ce soit un 5-cycle. Donc tout automorphisme envoie un 5-cycle sur un 5-cycle.

iii. Tous les 5-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{S}_6$.

Il y a $6 \times 4!$ 5-cycles dans $\mathfrak{S}_6$ (6 choix de points fixe, puis $4\,!$ 5-cycles possibles sur les 5 points du support). On note C_5 l'ensemble des 5-cycles de $\mathfrak{S}_6$.

En utilisant la relation orbite-stabilisateur pour l'action de conjugaison dans $\mathfrak{S}_6$ (C_5 est alors l'orbite de γ sous cette action), on en déduit que pour tout 5-cycle γ, $|C_{\mathfrak{S}_6}(\gamma)| = |\mathfrak{S}_6| \,/\, |C_5| = 6!/(6 \times 4!) = 5$. Or on sait que le centralisateur de γ contient au moins les puissances de γ (au nombre de 5). Par égalité des cardinaux, $|C_{\mathfrak{S}_6}(\gamma)| =< \gamma >$.

iv. Soit ϕ_1 un automorphisme non-intérieur de $\mathfrak{S}_6$. Par (5.b.ii.), $\phi_1((12345))$ est un 5-cycle. Comme tous les 5-cycles sont conjugués, il existe $\delta \in \mathfrak{S}_6$ tel que $h_\delta \circ \phi_1((12345)) = (12345)$. On pose $\phi = h_\delta \circ \phi_1$. Alors ϕ n'est pas intérieur, sinon

ϕ_1 le serait. Par (5.b.i.) ϕ^2 est intérieur, donc il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ tel que $\phi^2 = h_\sigma$. Comme ϕ fixe (12345), ϕ^2 aussi. Et donc $\sigma(12345)\sigma^{-1} = (12345)$. Donc σ et (12345) commutent. Par (5.b.iii), cela signifie que σ est une puissance de (12345), donc est un 5-cycle ou l'identité.

v. Si $\sigma = Id$, on pose $\psi = \phi$ et on a $\psi \circ \psi = Id$.

Sinon, on pose $\psi = \phi^5 = \phi^2 \circ \phi^2 \circ \phi = h_\sigma \circ h_\sigma \circ \phi = h_{\sigma^2} \circ \phi$. Donc ψ n'est pas intérieur sinon ϕ le serait.

De plus $\psi^2 = \phi^{10} = (\phi^2)^5 = (h_\sigma)^5 = h_{\sigma^5} = Id$.

On a donc bien trouvé ψ un automorphisme non-intérieur d'ordre 2.

vi. On a :
- $\text{Int}(\mathfrak{S}_n) \lhd \text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ car d'indice 2 (par (5.b.i)).
- $\text{Int}(\mathfrak{S}_6) \cap < \psi >= \{Id\}$ car ψ non-intérieur.
- $\text{Int}(\mathfrak{S}_6). < \psi >= \text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$ car on a vu dans la preuve de (5.b.i.) que $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6) = \text{Int}(\mathfrak{S}_6) \cup \text{Int}(\mathfrak{S}_6) \circ \psi$.
- ψ d'ordre 2 donc $< \psi > \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $\text{Int}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6$ par (2).

Par théorème du produit semi-direct, $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) **Bonus : A quoi ressemblent ces automorphismes non-intérieurs ?**

i. Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions de $\mathfrak{S}_6$.

Si elles ont le même support, alors $\tau_1 = \tau_2$ et $\tau_1\tau_2 = Id$.

Si les deux supports ont exactement un élément commun, alors on peut écrire $\tau_1 = (ab)$ et $\tau_2 = (ac)$ avec $a \neq b \neq c \neq a$. Et $\tau_1\tau 2 = (acb)$ n'est pas une double transposition.

Si elles sont à supports disjoints, leur produit est évidement une double transposition.

ii. Soient γ_1 et γ_2 deux triples transpositions. Notons $\gamma_1 = \tau_1\tau_2\tau_3$ et $\gamma_2 = \tau_4\tau_5\tau_6$ leur décomposition en produit de transpositions à supports disjoints.

Commençons par remarquer que deux triples transpositions ne peuvent pas avoir exactement deux transpositions en commun (car sinon elles auraient aussi la dernière en commun).

Si elles ont trois transpositions en commun, alors $\gamma_1 = \gamma_2$ et $\gamma_1\gamma_2 = Id$.

Si elles ont une transposition en commun, par exemple $\tau_1 = \tau_4$. Alors $\gamma_1\gamma_2 = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_1\tau_5\tau_6$. τ_1 est à support disjoint de τ_2 et τ_3 donc commute avec elles. D'où $\gamma_1\gamma_2 = \tau_2\tau_3\tau_5\tau_6$. On remarque que $\tau_2\tau_3$ et $\tau_5\tau_6$ sont deux doubles transpositions distinctes sur un même ensemble de 4 éléments (à savoir $\text{Supp}(\tau_2) \cup \text{Supp}(\tau_3)$). Il est facile de vérifier qu'un produit de doubles transpositions distinctes de $\mathfrak{S}_4$ est un élément d'ordre 2 et de signature 1, donc est aussi une double transposition. D'où $\gamma_1\gamma_2$ est une double transposition.

Réciproquement : Supposons que $\gamma_1\gamma_2$ soit une double transposition. Alors le support de $\gamma_1\gamma_2$ est de cardinal 4 et $\gamma_1\gamma_2$ a donc deux points fixes distincts a et b. $\gamma_1\gamma_2(a) = a$ donc $\gamma_2(a) = \gamma_1^{-1}(a) = \gamma_1(a)$. γ_1 et γ_2 coïncident donc en a, donc contiennent toutes les deux la transposition $(a, \gamma_1(a))$. Deux triples transpositions dont le produit est une double transposition ont donc au moins une transposition en commun dans leur décomposition en produit de cycles disjoints.

iii. Soit ϕ un automorphisme non-intérieur de $\mathfrak{S}_6$. $\phi(A_2^6) = A_2^6$ car ϕ préserve l'ordre et la signature (Voir (4.b)) et les seuls éléments d'ordre 2 et de signature 1 de

$\mathfrak{S}_6$ sont les doubles transpositions. $((1i))_{i\in[\![2,6]\!]}$ est une famille d'éléments dont les produits deux à deux ne sont pas des doubles transpositions. Donc $(\phi((1i)))_{i\in[\![2,6]\!]}$ est une famille de triples transpositions distinctes (car ϕ bijective) dont les produits deux à deux ne sont pas des doubles transpositions. Par la question précédente, $(\phi((1i)))_{i\in[\![2,6]\!]}$ est donc une famille de triples transpositions dans laquelle deux éléments distincts n'ont aucune transposition commune dans leur décomposition.

iv. Soit ϕ un endomorphisme non-intérieur. ϕ réalise une bijection entre
   — Les familles ordonnées de 5 triples transpositions dont deux éléments distincts n'ont aucune transposition commune dans leur décomposition.
   — Les familles ordonnées de 5 transpositions disjointes dont deux éléments distincts ne sont pas à support disjoints.

   On va dénombrer le deuxième type de familles. Soient $(\tau_1,\dots,\tau_5)$ une telle famille. Alors pour tout $i\neq j$, $\sup\tau_i\cap\sup\tau_j$ est de cardinal 1. On peut donc supposer que $\tau_1=(ab)$ et $\tau_2=(ac)$ avec $a\neq b\neq c\neq a$. Il y a donc deux possibilités pour τ_3 : Soit $\tau_3=(ad)$ avec $d\notin\{a,b,c\}$, soit $\tau_3=(bc)$.

   Supposons $\tau_3=(bc)$. Alors $\operatorname{Supp}\tau_4$ a un élément en commun avec $\operatorname{Supp}\tau_1,\operatorname{Supp}\tau_2$ et $\operatorname{Supp}\tau_3$, donc doit contenir au moins deux éléments parmi $\{a,b,c\}$. Mais dans ce cas τ_4 coïncide avec une des 3 premières transpositions, ce qui est absurde.

   D'où $\tau_3=(ad)$. On montre ainsi qu'il existe un élément commun aux 5 supports des τ_i.

   Il y a 6 choix pour cet élément a. Une fois a fixé, les 5 transpositions de la famille sont forcément les (ab) avec $b\in[\![1,6]\!]\setminus\{a\}$ car elles sont distinctes. Comme on considère les familles ordonnées, on a 5! choix de familles contenant ces 5 éléments.

   Cela donne un total de $6\times 5!=720$ choix de familles ordonnées de 5 triples transpositions dont deux éléments distincts n'ont aucune transposition commune dans leur décomposition.

v. $Card(\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)\backslash\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6))=Card(\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6))=Card(\mathfrak{S}_6)=720$. Il y a 720 automorphismes non-intérieurs et chacun fournit un choix différent d'une famille ordonnée de 5 triples transpositions dont deux éléments distincts n'ont aucune transposition commune dans leur décomposition en tant qu'image de la famille génératrice $((1i))_{i\in[\![2,6]\!]}$

   Or on vient de montrer qu'il y a exactement 720 telles familles de 5 triples transpositions. Donc n'importe quel choix d'une telle famille comme image de la famille génératrice $((1i))_{i\in[\![2,6]\!]}$ suffit à définir un unique automorphisme non-intérieur.

vi. Exemple :

$$\phi:\begin{array}{ccc}\mathfrak{S}_6 & \to & \mathfrak{S}_6\\ (12) & \mapsto & (12)(34)(56)\\ (13) & \mapsto & (13)(25)(46)\\ (14) & \mapsto & (14)(26)(53)\\ (15) & \mapsto & (15)(24)(36)\\ (16) & \mapsto & (16)(23)(45)\end{array}$$ définit un automorphisme non-intérieur de $\mathfrak{S}_6$ tel que

   $\phi\circ\phi=Id$. (Ce dernier point étant un peu calculatoire à vérifier)