Théorie des groupes

Feuille d'exercices 1

12 Septembre 2016

Exercice 1 Pour chacun des couples formés d'un ensemble et d'une loi de composition interne suivants, dire s'il s'agit d'un groupe ; dans le cas où c'en est un, trouver l'élément neutre et, pour tout élément, son inverse.

1. $(\mathbb{R}; *)$, avec $x * y = x + y - 1$.
2. $(\{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\}, *)$, avec $f * g = f \circ g$.
3. $(\{A \in M(n, \mathbb{Z}) \mid \det(A) \neq 0\}, \cdot)$. Où $n \geq 2$.
4. $(\{A \in M(n, \mathbb{Z}) \mid \text{il existe } B \in M(n, \mathbb{Z}) : AB = BA = I\}, \cdot)$. Où $n \geq 2$.

Exercice 2 Soit G un ensemble et $*$ une loi de composition interne associative sur G . Supposons que $(G; *)$ possède un élément neutre e et que pour tout g dans G il existe h et h' dans G tels que $hg = e = gh'$. Est-ce que $(G; *)$ est un groupe ?

Exercice 3 Soit $n \geq 2$. Pour $g \in GL(n; \mathbb{R})$ notons g^t la matrice transposée de g .

- L'ensemble $\{-1; 0; 1\} \subset \mathbb{Z}$ définit-il un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$?
- L'ensemble $\{g \in GL(n; \mathbb{R}) \mid g^t = g\}$ définit-il un sous-groupe de $GL(n; \mathbb{R})$?
- L'ensemble $\{g \in GL(n; \mathbb{R}) \mid (g^t)^{-1} = g\}$ définit-il un sous-groupe de $GL(n; \mathbb{R})$?
- Soit G un groupe. L'ensemble $\{g \in G \mid g^2 = e\}$ définit-il un sous-groupe de G ?

Exercice 4

1. Soit G un groupe dans lequel tous les éléments g vérifient $g^2 = e$. Montrer que G est commutatif.
2. Soit G un groupe tel que, pour tous g et h dans G , on ait $(gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$. Montrer que G est commutatif.
3. Soit G un groupe tel que, pour tous g et h dans G , on ait $(gh)^2 = g^2h^2$. Peut-on conclure que G est commutatif ?
4. Donner un exemple de groupe non commutatif G tel que, pour tous g et h dans G , on ait $(gh)^3 = g^3h^3$.

Exercice 5 Soit G un groupe et H un sous-ensemble non vide de G , stable par la loi de groupe. Si on suppose que H est fini, H est-il un sous-groupe de G ? Et dans le cas général ?

Exercice 6 Soit G, H deux groupes. On munit le produit cartésien $G \times H$ d'une loi de composition interne $*$ donnée par $(g, h) * (g', h') = (gg', hh')$. Vérifier que cela définit une structure de groupe sur $G \times H$ (il s'agit du « groupe produit ») et indiquer l'élément neutre ainsi que l'inverse de $(g, h) \in G \times H$. Généraliser à un produit d'une famille quelconque de groupes $(G_i)_{i \in I}$.

Exercice 7 Soit G un groupe, H_1 et H_2 deux sous-groupes de G . Montrer que la réunion $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si H_1 est inclus dans H_2 ou H_2 inclus dans H_1 . Donner un exemple d'un groupe G et de sous-groupes H_1 et H_2 , tels que $H_1 \cup H_2$ ne soit pas un sous-groupe de G .

Exercice 8 Soit G un groupe fini contenant un élément g d'ordre deux. Montrer que son ordre $|G|$ est pair.

Exercice 9 Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe $g \neq e$ dans G tel que $g^2 = e$.

Exercice 10 Soit G un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de G . On a $H_1H_2 = \{xy, x \in H_1, y \in H_2\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que H_1H_2 soit un sous-groupe de G .

Exercice 11 1. $\mathbb{Z}$ muni de la loi $\star : (a, b) \mapsto a - b$ est-il un groupe ?

2. $\mathbb{Q}$ muni de la loi $\star : (a, b) \mapsto a + b + ab$ est-il un groupe ?

Exercice 12 Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}, z^n = 1\}$. Montrer que Γ muni de la multiplication est un groupe.

Exercice 13 Soit G un groupe et S une partie non-vide de G . on définit $C_G(S)$ le **centralisateur** de S dans G comme :

$$C_G(S) = \{g \in G, \forall x \in S, gx = xg\}$$

Quand $S = G$, $C_G(G)$ est alors appelé le **centre** de G et est noté $Z(G)$.

1. Montrer que pour tout $S \neq \emptyset$, $C_G(S)$ est un sous-groupe de G .

2. Montrer que $\bigcap_{x \in G} C_G(\{x\}) = Z(G)$.

3. Soit $x \in G$ et $H = C_G(\{x\})$. Vérifier que $x \in Z(H)$.

Exercice 14 Soient E un ensemble non-vide et G un groupe d'unité e . On note G^E l'ensemble des applications de E dans G . On considère la loi de composition définie dans G^E par :

$$\begin{aligned} G^E \times G^E &\rightarrow G^E \\ (f, g) &\mapsto fg \end{aligned}$$

avec pour tout x dans E , $fg(x) = f(x)g(x)$. Vérifier que G^E muni de cette loi forme bien un groupe puis que G^E est abélien si et seulement si G est abélien.