Théorie des groupes

Corrigé feuille 10

Exercice 1 (Classification des groupes d'ordre 30) Nous allons montrer qu'il y a exactement 4 groupes d'ordre 30, qui sont : $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$, D_{15}, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_5$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_3$.

1. **Centre du groupe diédral :**
   (a) $\left[r^i, r^j\right] = Id$.
   $\left[r^i, r^j s\right] = r^{2i}$.
   $\left[r^i s, r^j s\right] = r^{2(i-j)}$
   (b) $r^i s$ n'est jamais dans le centre car ne commute pas avec $r^{i+1}s$.
   r^i est dans le centre si et seulement si il commute avec tous les $r^j s$, c'est à dire si $r^{2i} = Id$, ce qui peut encore s'écrire $n \mid 2i$.
   Si n impair, la seule possibilité est $i = 0$ et donc $Z(D_n) = \{e\}$.
   Si n pair, cela se produit pour $i = 0$ ou $n/2$ d'où $Z(D_n) = \{e, r^{n/2}\}$.
   (c) $Z(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.
   $Z(D_15) = \{e\}$.
   $Z(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_5) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \{e\}$.
   $Z(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_3) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \{e\}$.
   Ces 4 centres sont de cardinaux différents et l'ordre du centre est un invariant par isomorphisme, donc ces 4 groupes sont bien distincts même à isomorphisme près.

2. **Une version alternative du théorème de produit direct :**
   (a) f surjective par définition.
   f injective :
   Si $f(n_1, k_1) = f(n_2, k_2)$, alors $n_1 n_2^{-1} = k_1 k_2^{-1} \in N \cap K$ et donc $n_1 = n_2$ et $k_1 = k_2$.
   (b) $n \in N$, $k \in K$.
   $nkn^{-1}k^{-1} \in K \cap N = \{e\}$, donc n commute avec k.
   (c) $N \cap K = \{e\}$ par hypothèse du thm.
   $NK = G$ par question a.
   Commutent par question b.
   On applique le théorème de produit direct.

3. **Classification des groupes d'ordre 15 :**
   (a) Par théorèmes de Sylow : $n_3 \equiv 1[3]$ et $n_3 \mid 5$, donc $n_3 = 1$. Il y a donc un unique 3-Sylow $H_3 \lhd G$.
   Par théorèmes de Sylow : $n_5 \equiv 1[5]$ et $n_5 \mid 3$, donc $n_5 = 1$. Il y a donc un unique 5-Sylow $H_5 \lhd G$.
   (b) On applique le théorème montré précédemment :
   $$G \cong H_3 \times H_5 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$$

4. **Retour à l'ordre 30 :** Soit G un groupe d'ordre 30.
   (a) Par théorèmes de Sylow, $n_2 \equiv 1[2]$ et $n_2 \mid 15$ donc $n_2 = 1, 3, 5$ ou 15.
   $n_3 \equiv 1[3]$ et $n_2 \mid 10$ donc $n_3 = 1$ ou 10.
   $n_5 \equiv 1[5]$ et $n_5 \mid 6$ donc $n_5 = 1$ ou 6.
   (b) Sinon, on a $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$. Les 3-Sylow sont d'intersection 2 à 2 triviale. De même pour les 5-Sylow. Il y a donc 20 éléments d'ordre 3 et 24 éléments d'ordre 5. Absurde

(c) Supposons que $n_3 = 1$. Alors par thm de Sylow, $H_3 \lhd G$. Soit y d'ordre 5.
Alors $H_3 < y >$ est un sous-groupe. (car $H_3 < y > = < y > H_3$)
Par 2)a), $|H_3 < y >| = 15$.
Donc G contient un sous-groupe d'ordre 15, qui est distingué. car d'indice 2.
Un phénomène symétrique se produit si $n_5 = 1$.

(d) Notons H le sous-groupe d'ordre 15. Alors H est cyclique par la question 3, donc contient $\varphi(15) = 8$ éléments d'ordre 15. Il y a également un élément d'ordre 1.
Si $n_3 = 10$, G contient 20 éléments d'ordre 3 et donc un seul d'ordre 5. Absurde.
Si $n_5 = 6$, G contient 24 éléments d'ordre 5. Absurde.
Donc $n_3 = 1$ et $n_5 = 1$.

(e) $H \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ et $H_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$H \lhd G$.
$H_2 \cap H = \{e\}$ en raisonnant sur les ordres.
$G = HH_2$ car HH_2 est un sous-groupe (car $H \lhd G$) d'ordre > 16.
Par théorème de produit semi-direct, $G \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(f) Soit $\chi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$. Alors χ est la multiplication par $\chi(1)$ où $\chi(1)$ est un inversible de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})*$.
On note $\chi_k : \overline{x} \mapsto \overline{kx}$.
$\chi_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \Leftrightarrow k \wedge n = 1 \Leftrightarrow k \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$.
Donc $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) = \{\chi_k \mid k \in \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}\}$.

(g) Soit $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}))$.
ϕ morphisme $\Leftrightarrow \phi(0) = Id$ et $\phi(1)$ est d'ordre 1 ou 2.
ϕ morphisme $\Leftrightarrow \phi(0) = Id$ et $\phi(1) = \chi_k$ avec $k^2 \equiv 1[15]$.
ϕ morphisme $\Leftrightarrow \phi(0) = Id$ et $\phi(1) = \chi_k$ avec $k \in \{1, 4, 11, 14\} =$.
$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}))$ est donc d'ordre 4.

(h) Par 4)g), il y donc au plus quatre groupes d'ordre 30 distincts. D'après 1), il y en a au moins 4. Il y en a donc exactement 4, qui sont annoncés au début de l'exercice.

5. **Lemme :** Soit $G = H \rtimes_\varphi K$ un produit semi direct. Alors

$$Z(G) = \{(h, k) \mid \ k \in Z(K), \ \forall h' \in H, \varphi(k')(h) = h, \ \varphi(k) = \varphi_{h^{-1}}\}$$

Où $\varphi_{h^{-1}}$ dénote l'automorphisme intérieur de H de conjugaison par h^{-1}.
Preuve :

$$\begin{aligned}(h, k) \in Z(G) &\Leftrightarrow \forall (h_0, k_0) \in G, \ \ (h, k) \star (h_0, k_0) = (h_0, k_0) \star (h, k) \\ &\Leftrightarrow \forall (h_0, k_0) \in G, \ \ (h.\varphi(k)(h_0), k.k_0) = (h_0.\varphi(k_0)(h), k_0.k) \\ &\Leftrightarrow [k \in Z(K)] \ \text{ et } \forall h_0 \in H, h.\varphi(k)(h_0) = h_0.\varphi(k_0)(h)\end{aligned}$$

Le cas particulier $h_0 = e$ nous donne $h = \varphi(k_0)(h)$ pour tout k_0. Donc

$$(h, k) \in Z(G) \Leftrightarrow [k \in Z(K)] \ \text{ et } \ [\forall h_0 \in H, \varphi(h_0)(k) = k] \ \text{ et } \forall (h_0, k_0) \in G, \varphi(k)(h_0) = h^{-1}.h_0.h$$

□

Ici, $H = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ est abélien, donc $Z(H) = H$. De plus, ses automorphismes intérieurs sont tous triviaux.
Donc la condition $\varphi(k) = \varphi_{h^{-1}}$ équivaut à $\varphi(k) = Id$.
D'où $Z(G) = \{(h, k) \mid \ \varphi(k) = Id, \ \forall h' \in H, \varphi(h')(k) = k\}$
$\phi(1) = Id$. C'est le produit direct $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.
$\phi(1) = -Id$: $-Id$ n'a pas d'autre point fixe que 0, et $\phi(1) \neq Id$, donc $Z(G)$ est trivial. D'où $G \simeq D_{15}$.
$\phi(1) = \chi_{11}$. On vérifie que χ_{11} a 5 points fixes (qui sont $0, 3, 6, 9, 12$), donc, par le lemme, $Z(G) = \{(0, 0); (3, 0); (6, 0); (9, 0); (12, 0)\}$ qui est de cardinal 5, donc $G \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_3$.
$\phi(1) = \chi_4$. On vérifie que χ_4 a 3 points fixes (qui sont $0, 5, 10$), donc, par le lemme, $Z(G) = \{(0, 0); (5, 0); (10, 0)\}$ qui est de cardinal 3, donc $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_5$.

Exercice 2 (Formule de Burnside)

1. $\{S(a, \bullet), \quad a \in X\}$ et $\{S(\bullet, b), \quad b \in Y\}$ sont deux partitions de S d'où :

$$|S| = \sum_{a \in X} |S(a, \bullet)| = \sum_{b \in Y} |S(\bullet, b)|.$$

2. On note $S = \{(g, x) \in G \times E, \quad g.x = x\}$. Alors :
   $S(g, \bullet) = Fix(g)$.
   $S(\bullet, x) = \mathrm{Stab}_G(x)$.
   Par la question 1, on a $\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{x \in E} |\mathrm{Stab}_G(x)|$. En prenant (x_i) une famille de représentants des orbites, on a :

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{i=1}^{t} \sum_{x \in Gx_i} |Stab_G(x)|$$

3.

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{i=1}^{t} |G.x_i| \, |Stab_G(x)|$$

   On applique la relation orbite-stabilisateur :

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{i=1}^{t} |G| = t\,|G|.$$

4. On numérote les positions des perles de 1 à 9 et on note $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les façons de répartir 4 perles bleues, 3 jaunes et 2 rouges parmi les 9 positions.. On a donc $|\mathcal{C}| = \binom{9}{4}.\binom{5}{3} = 1260$.

   Désormais on veut savoir combien de ces colliers de $\mathcal{C}$ sont réellement différents. En effet, un collier qui serait une rotation d'un autre n'est pas vraiment différent.

   En voyant notre collier comme les sommets d'un nonagone régulier, on cherche en fait le nombre d'orbite de $\mathcal{C}$ sous l'action de D_9.

   En effet si l'on effectue une rotation du collier d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ou que l'on retourne le collier (symétrie par rapport au centre du collier et la perle en 1), on se retrouve avec le même collier. Tout élément de D_9 préserve donc le collier.

   Il ne peut y en avoir plus de transformations le préservant. En effet, une fois que l'on a déterminé le nouvel emplacement de la perle 1 et si l'on inverse ou pas ses deux voisins, tout le reste du collier est déterminé.

   Pour appliquer la formule de Burnside, il nous reste donc à compter, pour chaque élément f de D_9, le cardinal de $Fix(f)$. il y a dans D_9 : 1 identité, 8 rotations, 9 symétries.

   Tous les éléments de $\mathcal{C}$ sont des points fixes de Id, qui a donc 1260 points fixes.

   Aucun collier n'est un point fixe d'une rotation. En effet, il est impossible d'envoyer les 2 perles rouges sur elles-mêmes.

   Soit a un collier fixe par s la symétrie par rapport à la droite passant par 0 et la perle 1. Alors, les ensembles suivant doivent être formés de perles de mêmes couleurs : (1) (2,9) (3,8) (4,7) (5,6). La seule couleur présente en quantité impaire est le jaune donc 1 est jaune. Ensuite, il y a quatre possibilité pour choisir la paire jaune puis 3 pour choisir la paire rouge. Il y a donc $3 \times 4 = 12$ colliers qui sont des points fixes pour s.

   On peut alors écrire, en notant t le nombre d'orbites de $\mathcal{C}$ sous l'action de D_9 que :

$$|D_9|\,.t = |Fix(Id)| + |Fix(s)|\,.9$$
$$18.t = 1260 + 9 \times 12$$
$$t = 76$$