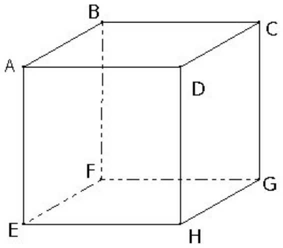
Théorie des groupes

Feuille d'exercices 11

28 Novembre 2016

Exercice 1 (Quelques résultats géométriques sur les isométries des solides de Platon)

1. **Isométries du cube** :



On considère un cube $\mathcal{C}$ centré en O dans l'espace affine $(O, \mathbb{R}^3)$, avec pour sommets les points de la forme $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Notons les sommets du cube A, B, C, D, E, F, G, H.
Notre objectif est déterminer l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{C}$. On cherche donc :
$Isom(\mathcal{C}) = \{G \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}),\ \ G(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$ et $Isom^+(\mathcal{C}) = \{G \in Isom(\mathcal{C}),\ det(G) = 1\}$.

(a) On note $D_1 = [AG], D_2 = [BH], D_3 = [CE], D_4 = [DF]$ les 4 grandes diagonales de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces 4 grandes diagonales. Montrer que $Isom(\mathcal{C})$ induit une action de groupe sur $\mathcal{D}$.

(b) Cela nous donne un morphisme $\rho : Isom(\mathcal{C}) \to \mathfrak{S}_4$. Montrer que ce morphisme est surjectif.

(c) Calculer $\ker \rho$. En déduire que $Isom(\mathcal{C})/\{Id, s\} \cong \mathfrak{S}_4$ où s est un anti-déplacement bien choisi.

(d) Montrer que $Isom^+(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4$.

(e) Montrer que $Isom(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. **Coloriages du cube**

On note les 6 faces du cube $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$.
On dispose de k couleurs, représentées par les entiers de 1 à k. Un coloriage est une application qui à chaque face du cube associe une couleur. On note donc $Col = [\![1, k]\!]^6$ l'ensemble des coloriages du cube.

(a) Quelle est l'action naturelle de $Isom^+(\mathcal{C})$ sur Col ?
On dit que deux coloriages c_1 et c_2 sont équivalents si ils sont dans la même orbite sous l'action de $Isom^+(\mathcal{C})$ sur Col. Géométriquement, cela signifie que c_2 est le coloriage obtenu à partir de c_1 en faisant une rotation de $\mathcal{C}$.
On cherche à déterminer le nombre d'orbites de cette action, qui est donc le nombre de coloriages à rotations du cube près.

(b) Pour chaque type d'élément de $\mathfrak{S}_4$ déterminer les élément de $Isom^+(\mathcal{C})$ associés.

(c) Pour chacune de ces rotations $g \in Isom^+(\mathcal{C})$, déterminer $|Fix_{Col}(g)|$.

(d) En déduire le nombre de coloriages du cube réellement différents.

3. **Isométries de l'octaèdre**

On considère un octaèdre régulier centré en O, noté Γ, ayant pour sommets les points $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$.

(a) Montrer que $Isom(\mathcal{C}) \subset Isom(\Gamma)$.

(b) Trouver un cube $\mathcal{C}'$ tel que $Isom(\Gamma) \subset Isom(\mathcal{C}')$, et en déduire $Isom(\Gamma)$.

4. **Un peu de culture : Icosaèdre et Dodécaèdre, Sous-groupes de** $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

   On dit que le cube et l'octaèdre sont des polyèdres duaux l'un de l'autre : Chacun a pour sommet les les milieux des faces de l'autre et cela implique qu'ils ont les mêmes groupes d'isométries et de rotations.

   Le tétraèdre est particulier parce qu'il est son propre dual, et nous avons vu que son groupe d'isométries est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et que son groupe de rotations est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.

   En revanche, le même phénomène de dualité se produit pour les deux derniers solides de Platon : Le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier sont aussi duaux l'un de l'autre. Ils ont donc le même groupe d'isométries, qui est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$, et le même groupe de rotations, qui est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$. Pour les trouver, on exhibe 5 cubes inscrits dans le dodécaèdre ayant une grande diagonale de taille maximale sur lesquels agit le groupe d'isométries de manière transitive et fidèle. (Tout cela étant assez long à montrer en pratique)

   Un autre résultat intéressant est que les groupes cycliques ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), les groupes d'isométries des polygones réguliers (soit les groupes diédraux D_n) et les groupes de rotations des solides de Platon ($\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_5$) sont en fait les seuls sous-groupes finis du groupes des isométries positives de $\mathbb{R}^3$ ($\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$).

5. *Bonus : Pourquoi y a-t-il exactement 5 solides de Platon ?*

Exercice 2 (Classification des groupes d'ordre 12)

Soit G d'ordre 12. On note n_2 le nombre de 2-Sylow et n_3 le nombre de 3-Sylow de G.

1. Montrer que $n_3 \in \{1,4\}$, $n_2 \in \{1,3\}$ et que $n_2 = 1$ OU $n_3 = 1$.
2. Montrer que si $n_2 = 1, n_3 = 1$, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Si $n_2 = 1$ et $n_3 = 4$. Faire agir G sur l'ensemble de ses 3-Sylow pour montrer que $G \cong \mathfrak{A}_4$.
4. Cas $n_3 = 1$, $n_2 = 3$.
   (a) **Préliminaire :** Soient H, K deux groupes, et α_1, α_2 deux morphismes $K \to \mathrm{Aut}(H)$. Montrer que si il existe $\phi \in Aut(K)$ tel que $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \phi$, alors les produits semi-directs $H \rtimes_{\alpha_1} K$ et $H \rtimes_{\alpha_2} K$ sont isomorphes.
   (b) **Préliminaire 2 :** En notant K le groupe de Klein, montrer que $\mathrm{Aut}(K) = \mathfrak{S}(K \setminus \{e\})$.
   (c) Montrer que G est le produit semi-direct (non-direct) de son 3-Sylow par un 2-Sylow.
   (d) Décrire $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.
   (e) Montrer qu'on obtient ainsi 2 classes d'isomorphismes possibles pour G, dont l'une est D_6.
   Indication : A quoi peuvent ressembler les 2-Sylow ?
5. Conclure sur la classification.

Culture : Le groupe "inconnu" de cette classification est appelé groupe dicyclique et est noté Dic_3. On peut le décrire comme : $< a, b \mid a^6 = e; b^2 = a^3; b^{-1}ab = a^{-1} >$ ou bien $< a, b, c \mid a^3 = b^2 = c^2 = e >$ ou encore comme le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ où $\omega = e^{2i\pi/6}$.