Théorie des groupes

Corrigé feuille 11

Exercice 1 (Quelques résultats géométriques sur les isométries des solides de Platon)

1. **Isométries du cube** :

   (a) Les isométries préservent les distances. les 4 grandes diagonales étant les seules façons de réaliser la distance $2\sqrt{3}$ dans le cube, une grande diagonale est envoyée sur une grande diagonale par une isométrie préservant $\mathcal{C}$.
   On a bien $Id.(D_i) = D_i$ et $(g_1 g_2)(D_i) = g_1(g_2(D_i))$.
   Donc $Isom(\mathcal{C})$ induit bien une action sur les grandes diagonales.

   (b) Soit s la symétrie par rapport au plan contenant D_3 et D_4. Alors, $s(D_1) = D_2$, $s(D_2) = D_1$, $s(D_3) = D_3$ et $s(D_4) = D_4$.
   Donc $\rho(s) = (12)$. De la même façon, toutes les transpositions ont un antécédent par ρ. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, ρ est surjective.

   (c) Soit f $\in \ker \rho$. Si que f n'est pas l'identité : Au moins un des sommets n'est pas envoyé sur lui-même. On supposer sans perte de généralité qu'il s'agit de A $f(D_1) = D_1$ donc $f(A) = AouG$. Par hypothèse, $f(A) \neq A$, donc $f(A) = G$. (Et donc $f(G) = A$)
   Déterminons l'image de B : Comme $f(D_2) = D_2$, $f(B) \in \{B, H\}$. De plus, comme $f(B)$ doit être à distance 2 de $f(A)$, donc $f(B) \in \{F, C, H\}$. Au final, $f(B) = H$.
   De la même façon, on trouve que $f(C) = E$ et $f(D) = F$.
   Une isométrie préservant les barycentres, $f(O) = O$. Donc f coïncide avec s la symétrie de centre O sur la base (OA, OB, OC) Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales, donc $f = s$.
   Au final, $\ker \rho = \{s, Id\}$.
   s est bien un anti-déplacement, car $-Id$ est de déterminant -1 sur un espace de dimension impaire.
   Par théorème d'isomorphisme, $Isom(\mathcal{C})/\{Id, s\} \cong \mathfrak{S}_4$.

   (d) Une classe d'équivalence de $Isom(\mathcal{C})/\{Id, s\}$ est un ensemble $\{f, s \circ f\}$. s étant un anti-déplacement, il y a exactement un de ces deux éléments qui est de déterminant 1 et donc est dans $Isom^+(\mathcal{C})$.
   Donc, $\phi : Isom^+(\mathcal{C}) \to Isom(\mathcal{C})/\{Id, s\}$ qui envoie un élément sur sa classe d'équivalence modulo $\ker \rho$ est un isomorphisme.
   Donc $Isom^+(\mathcal{C}) \cong Isom(\mathcal{C})/\{Id, s\} \cong \mathfrak{S}_4$.

   (e) $Isom^+(\mathcal{C}) \lhd Isom(\mathcal{C})$ car d'indice 2.
   $< s > \lhd Isom(\mathcal{C})$ en tant que noyau de morphisme.
   $Isom^+(\mathcal{C}) \cap < s >= \{e\}$ par déterminant des éléments.
   $|Isom^+(\mathcal{C})| \,.\, |< s >| = |Isom(\mathcal{C})|$.
   Donc par théorème de produit direct, $Isom(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. **Coloriages du cube**
   On note les 6 faces du cube $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$.
   On dispose de k couleurs, représentées par les entiers de 1 à k. Un coloriage est une application qui à chaque face du cube associe une couleur. On note donc $Col = [\![1, k]\!]^6$ l'ensemble des coloriages du cube.

   (a) Une isométrie envoie une face sur une face. Elle est bijective donc agit par permutation des faces.
   L'action induite sur les coloriages est alors :

$$\forall g \in Isom^+(\mathcal{C}),\ \ \forall (i_1, \ldots, i_6) \in Col,\ \ g.(i_1, \ldots, i_6) = (i_{g^{-1}(1)}, \ldots, i_{g^{-1}(1)})$$

Il est facile de vérifier que c'est bien une action.

Quelle est l'action naturelle de $Isom^+(\mathcal{C})$ sur Col ?

On dit que deux coloriages c_1 et c_2 sont équivalents si ils sont dans la même orbite sous l'action de $Isom^+(\mathcal{C})$ sur Col. Géométriquement, cela signifie que c_2 est le coloriage obtenu à partir de c_1 en faisant une rotation de $\mathcal{C}$.

On cherche à déterminer le nombre d'orbites de cette action, qui est donc le nombre de coloriages à rotations du cube près.

(b) Pour chaque type d'élément de $\mathfrak{S}_4$ déterminer les élément de $Isom^+(\mathcal{C})$ associés.

$Id \in \mathfrak{S}_4$ correspond à $Id \in Isom^+(\mathcal{C})$.

Soit D_i et D_j deux diagonales distinctes. On note P le plan contenant ces deux diagonales et on définit D la médiatrice de D_i et D_j dans P. Alors la rotation d'angle π autour de D agit sur l'ensemble des grandes diagonales en permutant D_i et D_j. On réalise ainsi les 6 transpositions.

Si D_i est une diagonale, les rotations selon D_i d'angles $2\pi/3$ et $4\pi/3$ agissent sur l'ensemble des diagonales en fixant D_i et en réalisant les 2 deux 3-cycles sur les autres diagonales. On réalise ainsi les huit 3-cycles de $\mathfrak{S}_4$.

Si on note D_0 une droite passant par les centres de deux faces opposées :

La rotation selon D_0 d'angle π réalise une double transposition des diagonales. Comme il y a 3 paires de faces, on a bien réalisé les 3 doubles transpositions.

Les rotations selon D_0 d'angle $\pi/2$ et $3\pi/2$ agissent comme des 4-cycles sur l'ensemble des grandes diagonales. Là encore, comme il y a 3 paires de faces, on a bien réalisé les six 4-cycles de $\mathfrak{S}_4$.

(c) Comptons pour chaque élément $g \in Isom^+(\mathcal{C})$, le nombre de points fixes Col sous l'action de g.

— $g = Id$. Tous les coloriages sont fixes par Id, donc il y k^6 points fixes.

— g correspond à une transposition. Chaque face est envoyée sur la face opposée, donc un coloriage est un point fixe si et seulement si 2 faces opposées sont coloriées de la même couleur. Ce qui donne k^3 coloriages fixés par g.

— g correspond à un 3-cycle. Par exemple, g est la rotation selon (AG). Les 3 faces touchant A sont permutées cycliquement, de même pour les 3 autres faces (touchant G). Donc le coloriage est un point fixe de g si et seulement si dans chacun de ces ensembles de 3 faces, les 3 faces ont même couleur. Soit k^2 points fixes.

— Si g correspond à un 4-cycle : les deux faces par lesquelles passent l'axe de rotation sont fixées par g, et les 4 autres sont permutées cycliquement, donc il y k^3 coloriages fixés par g

— Si g est une double transposition, les deux faces par lesquelles passent l'axe de rotation sont fixées par g pour les 4 autres, chacun est envoyée sur sa face opposée. Soit k^4 coloriages fixés par g.

(d) On applique la formule de Burnside :

nombre de coloriages $= \left|Orbites_{Isom^+(\mathcal{C})}(Col)\right| = \frac{1}{|Isom^+(\mathcal{C})|}\sum_{g\in Isom^+(\mathcal{C})}|Fix_{Col}(g)|$.

$$\frac{k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2}{24}$$

3. **Isométries de l'octaèdre**

(a) Chaque sommet de Γ est situé au centre d'une face de $\mathcal{C}$. Tout $f \in Isom(\mathcal{C})$ préserve les barycentres et les sommets de $\mathcal{C}$, donc envoie le centre d'une face sur le centre d'une face, c'est à dire envoie un sommet de Γ sur un sommet de Γ. Et donc, une arrête reliant deux sommets de Γ est envoyée sur une arrête reliant les images de ces deux sommets. Par conservation des distances, cela implique que deux sommets voisins sont envoyés sur deux sommets voisins.

Donc f préserve l'octaèdre et $f \in Isom(-)$.

D'où $Isom(\mathcal{C}) \subset Isom(\Gamma)$.

(b) On pose $\mathcal{C}'$ le cube inscrit dans Γ, c'est dire le cube formé des 8 centres des faces de Γ. Un raisonnement similaire à celui de la question précédente nous donne que $Isom(\Gamma) \subset Isom(\mathcal{C}')$.

Or, $\mathcal{C}'$ peut s'obtenir à partir de $\mathcal{C}$ par une simple homothétie. Il est alors facile de vérifier que $Isom(\mathcal{C}') = Isom(\mathcal{C})$.

On a donc que $Isom(\Gamma) = Isom(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Rien à corriger !
5. Une des méthodes de preuve : Lien Vidéo https ://www.youtube.com/watch ?v=KpUJrc4itMc

Exercice 2 (Classification des groupes d'ordre 12)

Soit G d'ordre 12. On note n_2 le nombre de 2-Sylow et n_3 le nombre de 3-Sylow de G.

1. Par théorèmes de Sylow, on a $n_3 \equiv 1[3]$ et $n_3 \mid 4$. Donc $n_3 \in \{1,4\}$.
   $n_2 \equiv 1[2]$ et $n_2 \mid 3$. Donc $n_2 \in \{1,3\}$.
   Si $n_3 = 4$. Les 3 Sylow sont des groupes cycliques d'ordre 3, d'intersections deux à deux triviales et contenant chacun 2 éléments d'ordre 3. Soit un total de 8 éléments d'ordre 3. Il y a donc 3 éléments dont l'ordre est une puissance de 2, et donc un seul 4-Sylow et $n_2 = 1$.
   Donc $n_3 = 1$ OU $n_2 = 1$.
2. Si $n_2 = 1, n_3 = 1$, les Sylow H_2 et H_3 sont uniques et distingués.
   $H_2 \cap H_3 = \{e\}$ (Par raisonnement sur l'ordre des éléments)
   $|H_2| \, . \, |H_3| = 12$
   Par la version alternative du théorème de produit direct (voir TD 10), on a $G \cong H_2 \times H_3$.
   H_3 est cyclique. Si H_2 est cyclique, alors par le théorème chinois, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Si H_2 est le groupe de Klein, alors $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Si $n_2 = 1$ et $n_3 = 4$: Notons H_3^i avec $i \in [\![1,4]\!]$ les quatre 3-Sylow de G. L'action de G sur $\left\{H_3^i\right\}$ par conjugaison nous fournit un morphisme $\rho : G \to \mathfrak{S}_4$.
   Calculons $\ker \rho$. Par définition, $\ker \rho = \bigcap_{i=1}^4 \mathrm{N}(H_3^i)$.
   Par les théorèmes de Sylow, l'action est transitive, donc n'a qu'une seule orbite. Donc, par la relation orbite-stabilisateur, $\mathrm{N}(H_3^i)$ est de cardinal 3. Comme on a $H_3^i \subset \mathrm{N}(H_3^i)$, on obtient que $H_3^i = \mathrm{N}(H_3^i)$. Et donc $\bigcap_{i=1}^4 \mathrm{N}(H_3^i) = \{e\}$.
   Donc ρ est injective. $\rho(G)$ est donc un sous-groupe d'ordre 12 de $\mathfrak{S}_4$. Or, il n'y a qu'un seul sous-groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_4$, qui est $\mathfrak{A}_4$. Donc $G \cong \mathfrak{A}_4$.
4. Cas $n_3 = 1, n_2 = 3$.
   (a) On pose $f : \begin{array}{ccc} H \rtimes_{\alpha_1} K & \to & H \rtimes_{\alpha_2} K \\ (h,k) & \mapsto & (h, \phi(k)) \end{array}$. Montrons que f est un isomorphisme.
   Tout d'abord, f est bijective (d'inverse $(h,k) \mapsto (h, \phi^{-1}(k))$) car ϕ est bijective.
   Soient (h_1,k_1) et (h_2,k_2) dans $H \rtimes_{\alpha_1} K$. Alors :
   $$f((h_1,k_1) \star_1 (h_2,k_2)) = f((h_1.\alpha_1(k_1)(h_2), k_1.k_2)) = (h_1.\alpha_1(k_1)(h_2), \phi(k_1.k_2))$$
   $$\begin{aligned} f((h_1,k_1)) \star_2 f((h_2,k_2)) &= (h_1, \phi(k_1)) \star_2 (h_2, \phi(k_2)) \\ &= (h_1.\alpha_2(\phi(k_1))(k_2), \phi(k_1)\phi(k_2)) \\ &= (h_1.\alpha_1(k_1)(h_2), \phi(k_1.k_2)) \end{aligned}$$
   Donc f est bien un morphisme et est donc un isomorphisme.
   (b) En notant $K = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ On a déjà que $\mathrm{Aut}(K) \subset \mathfrak{S}(\{(1,0),(0,1),(1,1)\})$, car tout automorphisme fixe le neutre, et réalise donc une permutation des 3 autres éléments.
   En munissant K d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension 2, on en déduit que les automorphismes de K sont les changements de base linéaires de K. Or il y a 6 bases de K, car deux éléments distincts non-neutres de K sont indépendants, et il y a 6 façons de choisir un tel couple. Donc par inclusion et égalité des cardinaux, $\mathrm{Aut}(K) = \mathfrak{S}(\{(1,0),(0,1),(1,1)\})$
   (c) $H_3 \lhd G$. Soit H_2 un 2-Sylow de G.
   $H_2 \cap H_3 = \{e\}$ (Par raisonnement sur l'ordre des éléments)
   H_3H_2 est un sous-groupe de G. En notant g un générateur de H_3, Il contient au moins gH_2 et g^2H_2, qui sont disjoints (sinon $g \in H_2$, absurde), donc est d'ordre au moins 8. D'où $H_3H_2 = G$.
   On applique le théorème de produit semi-direct : G est le produit semi-direct (non-direct, sinon, il serait abélien) de son 3-Sylow par un 2-Sylow : $H_3 \rtimes_\alpha H_2$

(d) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{Id, -Id\}$.

(e) Les 2-Sylow sont tous isomorphes, et sont soit isomorphes au groupe cyclique à 4 éléments, soit au groupe de Klein K.

Si $H_2 \cong K$, alors $H_2 = \{e, a, b, c\} =< a, b >$ avec a, b, c d'ordre 2 et $c = ab$. $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Il suffit de vérifier quelles sont les images possibles pour a et b.

Les morphismes de K dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ sont :

— α_1 tel que $\alpha_1(a) = \alpha_1(b) = Id$. Morphisme trivial. Alors le produit est direct, et donc G abélien. Absurde, car $n_2 \neq 1$.

— α_2 tel que $\alpha_2(a) = -Id$ et $\alpha_2(b) = Id$. (Et alors $\alpha_2(c) = -Id$)

— α_3 tel que $\alpha_3(a) = Id$ et $\alpha_3(b) = -Id$. (Et alors $\alpha_3(c) = -Id$)

— α_4 tel que $\alpha_4(a) = -Id$ et $\alpha_4(b) = -Id$. (Et alors $\alpha_4(c) = Id$)

$\alpha_2 = \alpha_3 \circ \phi_1 = \alpha_4 \circ \phi_2$ où $\phi_1 = (ab) \in \mathfrak{S}(\{a, b, c\})$, $\phi_2 = (bc) \in \mathfrak{S}(\{a, b, c\})$. Par la question 4.b, ϕ_1 et ϕ_2 sont des automorphismes, donc par 4.a, il n'y a, à isomorphisme près, qu'un seul produit semi-direct (non-direct) de K par H_3.

On note $H_3 =< h >$ et on se place dans $H_3 \rtimes_{\alpha_1} K$. On pose $r = (h, c)$.

$r^2 = (h.\alpha_1(c)(h), e) = (h^2, e)$.

$r^3 = (h.\alpha_1(e)(h), c) = (e, c)$.

$r^6 = (e.\alpha_1(c)(e), e) = (e, e)$.

On pose $s = (e, a)$.

$s^2 = (e.\alpha_1(a)(e), e) = (e, e)$.

Alors on a :

$r \star_{\alpha_1} s = (h, c) \star_{\alpha_1} (e, a) = (h.\alpha_1(c)(e), c.a) = (h, b)$.

$(r \star_{\alpha_1} s)^2 = (h.\alpha_1(b)(h), b^2) = (h.h^2, e) = (e, e)$.

Donc r est d'ordre 6, s d'ordre 2 et rs est d'ordre 2. Donc le groupe $< r, s >$ est isomorphe à D_6. Comme D_6 a 12 éléments, on en déduit que $G =< r, s >$ et donc que $G \cong D_6$.

Si $H_2 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, Alors $H_2 =< h >$. $\alpha : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Il n'y a qu'un seul morphisme non-trivial de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui est la réduction modulo 2 (car un seul élément d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). On obtient ainsi $Dic_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

5. Il y a 5 classes d'équivalence pour la relation d'isomorphie des groupes d'ordre 12 et elles sont :

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \mathfrak{A}_4 \qquad D_6 \qquad Dic_3$$

La dernière chose à vérifier est que ces groupes sont bien 2 à 2 distincts.

Les deux premiers sont abéliens, mais pas les trois derniers (car un groupe abélien a tous ses sous-groupes distingués et ne peut donc pas avoir plusieurs Sylow distincts conjugués). $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est cyclique, mais pas $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\mathfrak{A}_4$ possède 4 3-Sylow, alors que D_6 et Dic_3 en ont qu'un.

Reste à vérifier que Dic_3 n'est pas isomorphe à D_6. Il n'y a pas d'élément d'ordre 4 dans D_6, car les symétries sont d'ordre 2 et les rotations d'ordre divisant 6. Cependant en écrivant $Dic_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on remarque que $(0, 1)$ est d'ordre 4.

Ces 5 groupes sont bien distincts à isomorphismes près.