

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 2

19 Septembre 2016

Exercice 1 Etant donnée une matrice a nous notons a^t sa transposée. Pour chacune des applications suivantes, décider si elle est un morphisme et, dans le cas où c'est un morphisme, décider si celui-ci est injectif, surjectif et s'il est un isomorphisme. $n \geq 2$

1. $f: (M(n, \mathbb{R}), +) \rightarrow (M(n, \mathbb{R}), +), a \mapsto a + a^t$.
2. $f: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), a \mapsto a^t$.
3. $f: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*, a \mapsto \det(a)$.
4. $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, z \mapsto |z|$.

Exercice 2 Soient $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes et g un élément d'ordre fini de G_1 . Montrer que l'ordre de $\varphi(g)$ divise l'ordre de g .

Exercice 3 Déterminer le sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \cdot)$ engendré par l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 4 Soit $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes. On suppose que G_1 est engendré par l'ensemble de ses éléments d'ordre 2 et que G_2 est fini, d'ordre impair. Montrer que φ est trivial.

Exercice 5 Soient g et h deux éléments d'un groupe G .

- (a) Montrer que les éléments g, g^{-1}, hgh^{-1} ont le même ordre.
- (b) Montrer que gh et hg ont le même ordre.
- (c) Soit n un entier. Exprimer l'ordre de g^n en fonction de celui de g .
- (d) On suppose que $gh = hg$, que $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$ et que g et h sont d'ordre fini n et m respectivement. Exprimer l'ordre de gh en fonction de n et de m .

Exercice 6 Soit G un groupe monogène. Montrer que tout sous-groupe de G est monogène. Montrer que si G est fini d'ordre $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout diviseur m de n il existe un sous-groupe de G d'ordre m .

Exercice 7 Montrer que le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ des automorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ est d'ordre deux.

Exercice 8 Soit G un groupe tel que $\text{Aut}(G) = \{e\}$. On veut montrer que G est d'ordre au plus deux.

1. Montrer que G est abélien.
2. En déduire que $g \mapsto g^{-1}$ est un automorphisme de G .
3. En déduire que G a une structure d'espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à deux éléments.
4. Montrer qu'une application $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -linéaire inversible de V est un automorphisme de G . En déduire que G est un espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Déterminer les morphismes du groupe (\mathcal{S}_n, \circ) vers (\mathbb{C}^*, \times) .

Exercice 10 Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(G, *)$ vers (\mathbb{C}^*, \times) . On suppose que φ n'est pas une application constante. Calculer

$$\sum_{x \in G} \varphi(x)$$

Exercice 11 (Groupe quasi-cyclique de Prüfer) Soit p un nombre premier. On pose

$$G_p = \{z \in \mathbb{C}; \exists k \in \mathbb{N}, z^{p^k} = 1\}$$

- a) Montrer que G_p est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
- b) Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'aucun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.
- c) Montrer que G_p n'est pas engendré par un système fini d'éléments.