Théorie des groupes

Feuille d'exercices 3

26 Septembre 2016

Exercice 1 Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de groupes. Le sous-ensemble du produit direct $\prod_{i\in I} G_i$ formé des éléments $(g_i)_{i\in I}$ ne comportant qu'un nombre fini de g_i différents de l'élément neutre est appelé ***produit restreint*** et on le note $\oplus_{i\in I} G_i$. Montrer que le produit restreint des groupes $(G_i)_{i\in I}$ est un sous-groupe du produit direct $\prod_{i\in I} G_i$ des groupes $(G_i)_{i\in I}$.

Exercice 2 Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Exercice 3 Soient deux groupes G_1 et G_2.

1. Montrer que $G_1 \times G_2$ et $G_2 \times G_1$ sont isomorphes.
2. Si H_1 et H_2 sont respectivement des sous-groupes de G_1 et G_2, montrer que $H_1 \times H_2$ est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$.
3. Réciproquement, tous les sous-groupes de $G_1 \times G_2$ sont-ils de la forme $H_1 \times H_2$?

Exercice 4 Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes non-triviaux (i.e. différents de $\{e\}$ et du groupe tout entier) de $\mathfrak{S}_3$. Le produit direct $H_1 \times H_2$ peut-il être isomorphe à $\mathfrak{S}_3$?

Exercice 5 (Classification des groupes d'ordre 4)
Montrer qu'un groupe d'ordre 4 est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ soit isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Indication: Regarder les éléments d'ordre 4.

Exercice 6 (Représentations linéaires de groupes)
Pour un groupe G, un entier $n \in \mathbb{N}$ et un corps K, on appelle *représentation matricielle de G de degré n sur K* tout morphisme $\rho \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{GL}(n, K))$. Si de plus ρ est injective, la représentation est dite *fidèle*.

1. Montrer que le groupe symétrique S_3 admet une représentation fidèle de degré 3 sur $\mathbb{Q}$ et une de degré 2 sur $\mathbb{R}$. (Indication: Penser au groupes des isométries d'un triangle équilatéral).
2. Montrer que $\mathbb{C}^*$ admet une représentation fidèle de degré 2 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que tout groupe fini de cardinal n admet une représentation fidèle de degré n sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 7 Soient G_1 et G_2 deux groupes. Montrer que:

1. $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \mathrm{Aut}(G_1) \simeq \mathrm{Aut}(G_2)$.
2. $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \mathrm{Int}(G_1) \simeq \mathrm{Int}(G_2)$.

Exercice 8 (Homographies de la sphère de Riemann) On se place dans $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
A toute famille $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, on associe l'application définie sur $\mathbb{P}$ $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, avec, lorsque $c \neq 0$, $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$, et $f(\infty) = \infty$ quand $c = 0$. Une telle application est appelée une *homographie* et l'ensemble des homographies est noté $\mathcal{H}$.

1. Montrer que toute homographie f est une permutation de $\mathbb{P}$
2. Montrer que H l'ensemble des homographies de $\mathbb{P}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathbb{P}}$.
3. Montrer que $\{f_1 : z \mapsto z,\ \ f_2 : z \mapsto -z,\ \ f_3 : z \mapsto \frac{1}{z},\ \ f_4 : z \mapsto -\frac{1}{z}\}$ forme un sous-groupe de H isomorphe au groupe de Klein.

4. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \end{array}$. Montrer que φ est un morphisme, déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{im}(\varphi)$.

Exercice 9 Soit G un groupe ayant exactement 2 sous-groupes propres (c'est à dire distincts de G et $\{e\}$).

1. Montrer que G est fini.
2. Montrer que G est monogène.
3. En déduire que G est cyclique d'ordre pq ou p^3 avec p et q des nombres premiers distincts.