

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 5

17 Octobre 2016

Exercice 1 Soient G un groupe et $H \triangleleft G$ d'indice fini n . Montrer que pour tout $g \in G$, $g^n \in H$.

Exercice 2

1. Soit G un groupe. Montrer que tout sous-groupe H d'indice 2 dans G est distingué.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que le seul sous-groupe de S_n d'indice 2 est A_n .

Indication : S'intéresser à $\pi : S_n \rightarrow S_n/H$.

Exercice 3 Soient G, H deux groupes non triviaux. Soit $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ un morphisme de groupes. Montrer que le produit semi-direct $H \rtimes_\alpha G$ n'est jamais un groupe simple.

Exercice 4 Soit G et H deux groupes, $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme.

1. Rappelons que $\ker(\phi)$ est toujours distingué, qu'en est-il de $\text{Im}(\phi)$?
2. L'image d'un sous-groupe distingué est-elle distinguée ? l'image réciproque ?
3. $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il distingué dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$? $\text{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$? $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{O}_n(\mathbb{R})$? Dans les cas distingués, préciser ce que sont les quotients.

Exercice 5 (Sous-groupes caractéristiques) Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit *caractéristique* si pour tout $\alpha \in \text{Aut}(G)$, on a $\alpha(H) = H$. Cela est noté $H \triangleleft G$.

1. Montrer que $H \triangleleft G$ implique $H \triangleleft G$.
2. Montrer que $K \triangleleft H \triangleleft G$ implique $K \triangleleft G$.
3. Montrer que $K \triangleleft H \triangleleft G$ implique $K \triangleleft G$.

Exercice 6 (Sous-groupe dérivé) Soit G un groupe. Si x et y sont deux éléments de G , on note $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ le commutateur de x et y .

On appelle groupe dérivé de G , noté $D(G)$, le groupe engendré par les commutateurs de G . C'est à dire $D(G) = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$.

1. Montrer que $D(G) \triangleleft G$.
2. Montrer que $G/D(G)$ est abélien.
3. Soit H un sous-groupe distingué de G . Montrer que G/H abélien implique $D(G) \subset H$.

Exercice 7 On définit les deux sous-groupes de S_4 :

$$H = \{e, (12)(34)\}$$

$$K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Montrer que $H \triangleleft K$ et $K \triangleleft S_4$, mais que $H \not\triangleleft S_4$.

Exercice 8 (Sous-groupes maximaux) Soit G un groupe non-réduit à $\{e\}$.

Si H est un sous-groupe de G , H est dit maximal si : $H < K < G \Rightarrow K = H$ ou $K = G$.

1. Montrer que les sous-groupes maximaux de $\mathbb{Z}$ sont les $p\mathbb{Z}$ avec p premier.
2. Montrer que si G est fini, G possède des sous-groupes maximaux et que tout sous-groupe est inclus dans un sous-groupe maximal.
3. Soit H distingué dans G . Montrer que H maximal $\Leftrightarrow \frac{G}{H}$ cyclique d'ordre premier.

Exercice 9 (Automorphismes de $(\mathbb{F}_p)^n$) Soit p un entier premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps de cardinal p . (On rappelle que ce corps est unique (à isomorphisme de corps près) et est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

1. **Cas $n=1$** : Montrer que le groupe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est isomorphe à $(\mathbb{F}_p^\times, \times)$.
2. Montrer que tout endomorphisme de groupe de $\mathbb{F}_p^n$ est une application $\mathbb{F}_p$ -linéaire.
3. Montrer qu'il y a $(p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1})$ bases de $(\mathbb{F}_p)^n$.
4. Dédurre de ce qui précède le nombre d'automorphismes de groupes de $(\mathbb{F}_p)^n$

Exercice 10 Parmi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$, lesquels sont simples ?

Exercice 11 (Groupe des quaternions)

Soit les éléments de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ suivants :

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Nous notons 1 la matrice identité de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$.

1. Montrer que : $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$.
2. En déduire que $\{\text{id} = 1, -\text{id} = -1, I, -I, J, -J, K, -K\}$ est le groupe d'ordre 8 engendré par I, J et K . Vérifier qu'il n'est pas abélien.
Ce groupe est appelé **groupe des quaternions** et on le note Q_8 .
3. Montrer que tous les sous-groupes de Q_8 sont distingués.
4. Justifier que Q_8 ne peut pas être isomorphe au produit direct de deux groupes plus petits.
5. Montrer que Q_8 ne peut pas être isomorphe au produit semi-direct de deux groupes plus petits.

Culture : Ce groupe des quaternions est une source intéressante de contre-exemples :

- Un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués n'est pas forcément abélien. En fait, il a été prouvé (Dedekind, 1897 - Baer, 1933) que tout groupe non-abélien ayant tous ses groupes distingués est de la forme $Q_8 \times H$.
- Tout groupe ne peut pas forcément s'écrire comme un produit semi-direct non-trivial. (Plus petit contre-exemple)
- C'est le plus petit groupe non-abélien qui n'est pas un groupe diédral.