TD 5 - kit de survie

Dans tout ce texte, $(G, .)$ désigne un groupe quelconque.

Définition 1. *Un sous-ensemble H de G est un sous-groupe s'il est stable par la loi de G et par inverse.*

On voudrait pouvoir passer au quotient. Si H est un sous-groupe de G, on note G/H l'ensemble de classes à gauche de G modulo H. C'est à dire $G/H = \{xH, x \in G\}$. On a alors $xH = x'H \Leftrightarrow x^{-1}x' \in H$.

Cependant, il n'est pas forcément possible de munir G/H d'une structure de groupe compatible à celle de G. En effet, pour cela, il faudrait avoir pour tout $x, x' \in G$: $xx'H = xHx'H$, ce qui n'est pas le cas a priori, et motive la définition suivante :

Définition 2. *Si H est un sous-groupe de G, on dit que H est distingué dans G (ou que H est normal dans G si on aime les anglicismes un peu laids) si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
— $\forall x \in G,\ xH = Hx$
— $\forall x \in G,\ xHx^{-1} = H$
— $\forall x \in G,\ xHx^{-1} \subset H$
— *Les relations d'équivalence $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$ sont égales.*

(Remarque : $\{e\}$ et G sont toujours des sous-groupes distingués de G)
On note $H \lhd G$ lorsque H est un sous-groupe distingué de G.
Un exemple fondamental de sous-groupe distingué est donné par

Lemme 3. *Soit G_2 un groupe et $\phi : G \to G_2$ un morphisme. Alors $\ker \phi \lhd G$.*

Démonstration. Soit $x \in \ker \phi$, $g \in G$.
$\phi(gxg^{-1}) = \phi(g)\phi(x)\phi(g^{-1}) = \phi(g).e.\phi(g)^{-1} = e$. Donc $gxg^{-1} \in \ker \phi$. □

Une bonne façon de prouver qu'un sous-groupe est distingué est souvent de trouver un morphisme dont il est le noyau.

Vérifions à présent que les sous-groupes distingués permettent bien d'obtenir des groupes quotients :

Propriété 4. *H sous-groupe de G. Alors $H \lhd G$ si et seulement si G/H est muni d'une structure de groupe telle que l'application canonique $\pi : \begin{array}{ccc} G & \to & G/H \\ x & \mapsto & xH \end{array}$ soit un morphisme de groupes.*

Démonstration. Si H distingué : Soient $x_0 \in xH$ et $y_0 \in yH$. On a $x_0 = xh$ et $y_0 = yh'$ avec $h, h' \in H$. $x_0y_0 = xhyh'$. On sait que $yH = Hy$ donc $hy = yh''$ et $x_0y_0 = xyh''h' \in xyH$.
Cela vérifie que G/H groupe et que π morphisme.
Réciproquement, si G/H groupe tel que π morphisme :
$x \in \ker \pi \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$.
Donc $H = \ker \pi$ est distingué par lemme précédent. □

La notion de quotient mène à une autre idée importante :

Définition 5. *G est dit simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.*

Si l'on veut tenter une analogie, un peu douteuse, les groupes simples sont aux groupes ce que les nombres premiers sont aux entiers : Ils n'admettent aucun quotient non-trivial, donc ne sont décomposables en aucune "brique élémentaire" plus petite.

La classification des groupes simples finis a donc longtemps été un sujet de recherche majeur, elle a été achevée en 1983 avec l'établissement du "théorème énorme".