

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 6

24 Octobre 2016

Exercice 1 Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Montrer que $\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué de G d'indice fini $[G : N] = n$ et H un sous-groupe de G d'ordre fini s .

On suppose que n et s sont premiers entre eux, montrer que $H \subset N$.

Exercice 3 On note K un corps commutatif, et on note :

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}$$

1. Vérifier que Γ est un sous-groupe de $GL_3(K)$
2. Montrer que $Z(\Gamma)$ est formé des matrices vérifiant $a = b = 0$, et en déduire que $Z(G)$ est isomorphe à $(K, +)$.
3. Montrer que $\Gamma/Z(\Gamma) \cong K \times K$.

Exercice 4 Soit G un groupe, et F l'ensemble des éléments ayant un nombre fini de conjugués dans G .

Montrer que $F \triangleleft G$.

Exercice 5 (Classification des groupes d'ordre $2p$, p premier)

Commençons par montrer :

Proposition 1 :

Soit $n \geq 2$ et G un groupe engendré par deux éléments a et b tels que $o(a) = n$; $o(b) = 2$; $o(ab) = 2$.

Alors G est isomorphe au groupe diédral D_n .

On prend G un tel groupe

1. Montrer que $G = \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$ et est donc d'ordre $2n$.
2. Vérifier que G et D_n ont la même table de multiplication, et sont donc isomorphes. Ce qui montre la proposition
3. Soit G un groupe d'ordre $2p$. Nous cherchons une classification de ces groupes.
 - (a) Que se passe-t-il si G contient un élément d'ordre $2p$?
 - (b) Montrer que le cas où tous les éléments de G sont d'ordre 2 n'est possible que pour $p = 2$.
 - (c) Si l'on est pas dans les cas précédents, on note x un élément d'ordre p . Exhiber y d'ordre 2.
 - (d) En étudiant l'automorphisme $\varphi : \begin{matrix} \langle x \rangle & \rightarrow & \langle x \rangle \\ z & \mapsto & yzy \end{matrix}$, montrer que xy est d'ordre 2 et en déduire que G est isomorphe à D_p .
 - (e) Conclure sur la classification.

Exercice 6 (Une première action de groupe) Soit G un groupe, et H un sous-groupe de G d'indice fini n . Pour tout $x \in G$, on définit l'application φ_x par :

$$\varphi_x : \begin{array}{ccc} G/H & \rightarrow & G/H \\ a.H & \mapsto & (xa).H \end{array}$$

1. Vérifier que pour tout $x \in G$, φ_x est une permutation de G/H . On définit alors Φ par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathfrak{S}(G/H) \\ x & \mapsto & \varphi_x \end{array}$$

2. Vérifier que Φ est un morphisme de groupe.
3. Montrer que G contient un sous-groupe distingué N tel que $N \leq H$ et $[G : N] \leq n!$

Culture : On a en fait regardé ce qu'on appelle l'action de G sur G/H par translation à gauche.

Exercice 7 (Groupes libres) Soit X un ensemble non-vidé. On note X^{-1} un ensemble en bijection avec X , disjoint de X . Via cette bijection, on effectue l'identification

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X^{-1} \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

On pose $\mathcal{L}(X) = \{ \text{mots sur } X \cup X^{-1} \} \cup \{e\}$ où e désigne le mot vide. Par exemple, si $X = \{a, b\}$, $\mathcal{L}(X)$ contient entre autres aab , $a^{-1}ba^{-1}abbab^{-1}$, e , etc...

Un mot de $\mathcal{L}(X)$ est dit **réduit** s'il ne contient pas de sous-mot de type xx^{-1} ou $x^{-1}x$ (avec $x \in X$). A partir d'un mot m de $\mathcal{L}(X)$, on dit qu'on le réduit en supprimant un par un tous les sous-mots de la forme xx^{-1} ou $x^{-1}x$.

Dans l'exemple précédent, aab et e sont réduits, mais pas $a^{-1}ba^{-1}abbab^{-1}$. Celui-ci se réduit en $a^{-1}bbbab^{-1}$. On définit $L(X) = \{ \text{mots réduits de } \mathcal{L}(X) \}$ et l'opération $\star$ sur $L(X) : x \star y = \text{réduction} \circ \text{concaténation}(x, y)$. Exemples si $X = a, b : aab \star aab = aabaab$ et $abab \star b^{-1}a^{-1}ba = abba$.

On note $|x|$ la longueur d'un mot x , c'est à dire le nombre de symboles dont il est composé.

1. Montrer que $(L(X), \star)$ est un groupe.
Remarque : Si X est un ensemble fini à n éléments, on dit que $L(X)$ est LE groupe libre à n éléments. En effet, tous les groupes libres définis à partir d'ensembles ayant le même cardinal sont isomorphes.
2. Si $X = a$, qui est $L(X)$?
3. Montrer que X s'injecte dans $L(X)$ via une application ρ , et que $L(X)$ est engendré par $Im(\rho)$.
4. Soit G un groupe, $f : X \rightarrow G$ une application. Montrer qu'il existe $\bar{f} \in \text{Hom}(L(X), G)$ qui prolonge f .
5. En déduire que tout groupe de type fini est un quotient d'un groupe libre à un nombre fini de générateurs.