Théorie des groupes

Feuille d'exercices 8

14 Novembre 2016

Exercice 1 (Actions de groupes matricielles)

1. Soit $n > 0$. Montrer que $\begin{matrix} \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (a, x) & \mapsto & ax \end{matrix}$ définit une action de groupe.
2. Calculer ses orbites.
3. Si l'on considère la restriction de cette action à l'action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$, quelles sont alors les orbites ?

Exercice 2

1. Quels sont les conjugués de $(12)(34)$ dans $\mathfrak{S}_4$?
2. En déduire le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ qui commutent avec $(12)(34)$.
3. Généralisation : Soit $n \geq 4$. Déterminer les conjugués de $(12)(34)$ dans $\mathfrak{S}_n$ et en déduire le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec $(12)(34)$.

Exercice 3 Soit G un groupe agissant sur un ensemble E . On considère $E_G = \{x \in E, \forall g \in G, gx = x\}$ l'ensemble des points fixes de E .

1. Si $E_G = \emptyset, |G| = 15$ et $|E| = 17$, Calculer le nombre d'orbites de l'action et le cardinal de chacune d'entre elles.
2. Montrer que si $|G| = 33$ et $|E| = 19$, alors $E_G \neq \emptyset$.

Exercice 4 (p -groupes et groupes d'ordre p^2)

Définition : Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe fini G est un p -groupe fini lorsque G est d'ordre p^k pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Si G est un p -groupe fini agissant sur un ensemble X fini, montrer (en reprenant les notations de l'exercice précédent) que :

$$|X_G| \equiv |X| \pmod{p}$$

Indication : Isoler les orbites de taille 1

2. Soit G un p -groupe fini non-trivial. Montrer que le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.
3. Soit G un groupe d'ordre p^2 . Montrer que le centre de G ne peut pas être d'ordre p .
Indication : Regarder le centralisateur d'un élément de $G \setminus Z(G)$.
4. En déduire qu'un groupe d'ordre p^2 est nécessairement abélien.
5. En déduire la classification des groupes d'ordre p^2 .

Exercice 5 (Sous-groupes d'indice le plus petit premier) Soit G un groupe fini non-trivial et p le plus petit premier divisant $|G|$. Soit H sous-groupe de G d'indice p . Montrons qu'il est distingué.

1. On considère l'action de G sur l'ensemble des classes à gauche G/H par translation. Cette action induit un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_p$. Montrer que $|\text{im}(\varphi)| = p$.
2. Montrer que $\ker \varphi$ est d'indice p et que $H = \ker \varphi$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 6 On dit que l'action de G sur X est transitive si pour tout x et y dans X , il existe un $g \in G$ tel que $gx = y$. (Ce qui est équivalent à dire que l'action n'a qu'une seule orbite)

1. Montrer que $O_2^+(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $O_3^+(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (Isométries du tétraèdre régulier) Montrer que le groupe des isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3 qui laissent invariant un tétraèdre régulier de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Indication : Regarder l'action de ce groupe sur les sommets

En déduire que le sous-groupe des isométries directes qui laissent invariant le tétraèdre est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 8 (Devinette) Soit $n \geq 1$. Dans un pays imaginaire, un souverain despote n'aime pas beaucoup les mathématiciens. Il leur impose un jeu cruel en vue de s'en débarrasser :

Il rassemble les $2n$ mathématiciens du pays dans une même salle (nommée A).

Dans une autre salle, il dispose $2n$ coffres en ligne, et répartit au hasard (uniformément) les noms des mathématiciens dans les coffres. (1 nom par coffre)

Le souverain diabolique va voir les mathématiciens la veille du "jeu" pour leur expliquer les règles :

Un par un, les mathématiciens de la salle A seront conduits dans la salle des coffres. Chacun aura alors le droit d'ouvrir exactement n coffres parmi les $2n$, avant d'être conduit dans une salle B sans aucune possibilité de contacter les mathématiciens encore dans la salle A. Les coffres seront alors refermés et ce sera au tour du mathématicien suivant de venir ouvrir n coffres.

Une fois que tous les mathématiciens sont passés, ils gagnent (tous ensemble) et sont libérés si et seulement si chacun a ouvert le coffre contenant son nom parmi les n qu'il a ouverts. Dans le cas contraire, c'est à dire si au moins 1 d'entre eux n'a pas trouvé son nom, ils perdent tous et sont exécutés.

Le tyran se frotte les mains d'avance en se disant qu'ils n'ont que $\frac{1}{2^{2n}}$ chances d'en réchapper, cependant, les mathématiciens ont réussi à mettre au point une stratégie pendant la nuit qui leur donne une probabilité supérieure à $1 - \ln(2)$ de s'en sortir. Comment ont-ils fait ?