

Théorie des groupes

Feuille d'exercices 9

21 Novembre 2016

Rappels sur les p -Sylow Soit G un groupe fini et p divisant l'ordre de G . $|G| = p^n s$ où p ne divise pas s .
Un p -Sylow est un p -sous-groupe de G maximal pour l'inclusion des p -sous-groupes. Alors

1. Il existe au moins un p -Sylow dans G d'ordre p^n .
2. Tous les sous-groupes d'ordre p^n sont des p -Sylow.
3. Tous les p -Sylow sont conjugués entre eux dans G .
4. Tous les p -Sylow sont isomorphes. (Conséquence de 3)
5. Il y a un unique p -Sylow si et seulement si il est distingué. (Conséquence de 2 et 3)
6. Si on note n_p le nombre de p -Sylow, alors:

$$n_p \mid s \qquad n_p \equiv 1 \pmod{p}$$

Exercice 1 Soit G un groupe d'ordre 200. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 2 (Groupes d'ordre pq) Soient $p < q$ deux nombres premiers. Soit G d'ordre pq .

1. Montrer que G a un unique q -Sylow.
2. En déduire que $G \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si p ne divise pas $q - 1$, alors G est abélien.

Exercice 3 (Théorème de Wilson) Soit p premier.

1. Montrer qu'un élément de $\mathfrak{S}_p$ est d'ordre p si et seulement si c'est un p -cycle.
2. Combien y a-t-il de p -Sylow dans $\mathfrak{S}_p$?
3. En déduire que $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 4 Soit G un groupe d'ordre 175. Ecrire G comme produit de deux de ses sous-groupes de Sylow. En déduire que G est abélien.

Exercice 5 Soit G un groupe d'ordre pqr avec p, q , et r trois premiers distincts. On supposera que $p > q > r$. On note n_k le nombre de k -sous-groupes de Sylow de G pour k premier.

1. Montrer que:

$$pqr \geq n_p(p - 1) + n_q(q - 1) + n_r(r - 1) + 1$$

Indication: Compter les éléments selon leur ordre

2. Montrer que si l'on suppose $n_p > 1$ ET $n_q > 1$ ET $n_r > 1$, alors on a:

$$n_p = qr, \quad n_q \geq p, \quad n_r \geq q$$

3. En déduire que G n'est pas simple.

Exercice 6 (Simplicité de $\mathfrak{A}_5$...)

1. Montrer que les 3-cycles sont tous conjugués deux à deux dans $\mathfrak{A}_5$.
2. Montrer que les doubles transpositions sont toutes conjuguées deux à deux dans $\mathfrak{A}_5$.
3. Soient σ et γ deux 5-cycles. Montrer que les groupes $\langle \sigma \rangle$ et $\langle \gamma \rangle$ sont conjugués.
4. Soit H un sous-groupe distingué dans $\mathfrak{A}_5$. Montrer que si H contient un élément d'un type, il contient tous les éléments du même type.
5. Compter le nombre d'éléments de chaque classe de conjugaison et en déduire que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Exercice 7 (...qui est d'ailleurs le seul groupe simple d'ordre 60) Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. (a) Montrer que G admet 6 5-Sylow. On note Syl_5 l'ensemble des 5-Sylow de G .
(b) En faisant agir G sur Syl_5 , montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ via une injection $\alpha : G \rightarrow \mathfrak{S}_6$.
(c) Montrer qu'en fait, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_6$. On note alors $H = \alpha(G) \subset \mathfrak{A}_6$.
Indication: Que peut-être $\alpha^{-1}(\mathfrak{A}_6)$?
2. (a) Quel est le cardinal de l'ensemble des classes à gauche $\mathfrak{A}_6/H$?
(b) On fait agir $\mathfrak{A}_6$ par translation à gauche sur cet ensemble. Montrer que cette action fournit un isomorphisme $\phi : \mathfrak{A}_6 \rightarrow \mathfrak{A}_6$.
Indication: Admettre $\mathfrak{A}_6$ est simple et s'inspirer de la méthode de la première question.
(c) Montrer que $\phi(H) = \text{Stab}_{\mathfrak{A}_6}(H)$.
(d) En déduire que $\phi(H)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.
(e) Conclure