

**Théorie des groupes***Examen – Session 2*

Vous disposez de **2 heures** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées.** Cet énoncé comporte 2 pages et contient 4 exercices.

Exercice 1

Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini dont l'ordre est divisible par p . Montrer que le groupe G possède au moins un élément d'ordre p .

Exercice 2

Répondre par « vrai » ou « faux » aux questions suivantes. *Répondre « vrai » implique que vous donniez une preuve complète et valide de l'assertion proposée ; répondre « faux » implique que vous donniez une preuve complète et valide de la négation de l'assertion proposée.*

1. Soient G, G' deux groupes. Le produit direct $G \times G'$ est un groupe cyclique si et seulement si G, G' sont des groupes cycliques.
2. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. L'on note $S_n := S_{\{1, \dots, n\}}$ le groupe symétrique qui est formé des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Soit $\sigma \in S_n$ un cycle de longueur $m \leq n$. Soit $t \in \mathbf{N}$ un entier naturel, non nul, premier à l'entier m . Alors la permutation $\sigma^t \in S_n$ est un cycle.
3. Soit G un groupe, non trivial, de type fini. Alors tout sous-groupe de G est de type fini.

Exercice 3

Répondre aux questions suivantes.

1. Soit G un groupe abélien. Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments de G dont les ordres finis respectivement $q_1, \dots, q_n \in \mathbf{N}$ sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que l'élément $x := x_1 \cdots x_n$ de G est d'ordre $q_1 \cdots q_n$.
2. Soit G un groupe abélien. Soient $y_1, \dots, y_n$ des éléments de G dont les ordres finis sont respectivement $s_1, \dots, s_n \in \mathbf{N}$. Soit r le ppcm de $s_1, \dots, s_n$. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre r .
3. Soit K un corps fini. Nous notons K^* l'ensemble des éléments non nuls de K .
 - (a) Montrer que $(K^*, \times)$ est un groupe fini.
 - (b) Montrer que $(K^*, \times)$ est cyclique. (*Indication : on pourra utiliser la question précédente.*)
4. Soit $\mathbf{F}_{13} := \mathbf{Z}/13\mathbf{Z}$. Donner, en le justifiant, tous les générateurs du groupe multiplicatif $\mathbf{F}_{13}^*$.

Exercice 4

Soit $k \geq 1$. Nous désignons par $(\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z})^\times$ l'ensemble des éléments $x \in \mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$ pour lesquels il existe $y \in \mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$ tel que $x \cdot y = 1$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$. Pour tout entier $e \in \mathbf{Z}$, nous notons $\bar{e}$ sa classe dans l'anneau $\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z}$.

1. Montrer que $((\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z})^\times, \times)$ est un groupe abélien fini.
2. Donner le cardinal du groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z})^\times$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a la formule

$$5^{2^n} \equiv 1 + 2^{n+2} \pmod{2^{n+3}}.$$

4. Calculer l'ordre de l'élément $\bar{5}$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z})^\times$.
5. On suppose que $k \geq 3$. Montrer que le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z})^\times$ est produit direct des groupes cycliques $\langle \bar{5} \rangle$ et $\langle -\bar{1} \rangle$.
6. Utiliser les questions précédentes pour décrire, en fonction de l'entier k , le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/2^k\mathbf{Z})^\times$ pour tout entier $k \geq 1$.