Théorie des groupes

Examen – Session 1

Vous disposez de **2 heures** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées**. Cet énoncé comporte 2 pages.

Exercice 1

Soit G un groupe. Soit E un G-ensemble fini. Soit $x \in E$. L'on note Ω_x l'orbite de x sous l'action du groupe G. Prouver la formule suivante :

$$|\Omega_x| = [G : G_x].$$

Exercice 2

Répondre par « vrai » ou « faux » aux questions suivantes. *Répondre « vrai » implique que vous donniez une preuve complète et valide de l'assertion ; répondre « faux » implique que vous donniez une preuve complète et valide de la négation de l'assertion proposée.*

1) Soient G, G' deux groupes. Les groupes G et G' sont cycliques si et seulement si le produit direct $G \times G'$ est un groupe cyclique.

2) Soient p un nombre premier et $s \geq 2$ un entier naturel premier à p. Soit $n \geq 1$. Soit G un groupe fini d'ordre sp^n. Si le groupe G opère sur un ensemble fini E, alors il existe un entier $q \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$|E| - |E_G| = pq.$$

Nous rappelons que l'on note E_G l'ensemble des points fixes du G-ensemble E, i.e. les éléments $x \in E$ tels que $g \cdot x = x$ pour tout élément $g \in G$.

3) Soient G un groupe fini et $G_2 := \{g \in G,\ g^2 = 1\}$. Alors $|G| \equiv |G_2| \pmod 2$.

4) Soit G un groupe. Soient H, K deux sous-groupes de G. Le sous-groupe de G engendré par $H \cup K$ est le sous-groupe HK.

5) Soit G un goupe fini d'ordre $m \in \mathbf{N}^*$, supposé non premier. Alors, pour tout diviseur $d \in \mathbf{N}^*$ de m, il existe un sous-groupe de G d'ordre d.

Exercice 3

Soit $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$ l'intervalle formé des nombres réels compris entre 0 et 1. L'on note $\mathbf{R}^I$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbf{R}$. L'on considère l'application

$$+ \colon \mathbf{R}^I \times \mathbf{R}^I \to \mathbf{R}^I$$

définie par $(f,g) \mapsto (f+g\colon x \mapsto f(x)+g(x))$, qui est induite par l'addition sur $\mathbf{R}$. L'on note $\mathfrak{C}^0(I,\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^I$ formé des applications continues de I dans $\mathbf{R}$ et $\Gamma := \{\delta_a;\ a \in \mathbf{R}\}$ celui formé par les applications $\delta_a\colon x \mapsto a$ pour $x \in I$.

1) Montrer que $(\mathbf{R}^I, +)$ est un groupe abélien.

2) Montrer que les sous-ensembles $\Gamma, \mathfrak{C}^0(I,\mathbf{R})$ de $\mathbf{R}^I$ sont des sous-groupes de $(\mathbf{R}^I,+)$.

3) Pour $i \in \{1,2,3\}$, l'on considère les applications $F_i\colon \mathbf{R}^I \to \mathbf{R}$ définies par :

$$f \mapsto F_1(f) := f(1) \qquad f \mapsto F_2(f) := |f(0)| \qquad f \mapsto F_2(f) := \int_0^1 f(x)dx.$$

Indiquer (*en le justifiant*), pour tout $i \in \{1,2,3\}$, si l'application F_i induit un morphisme du groupe $(\mathfrak{C}^0(I,\mathbf{R}),+)$ dans le groupe $(\mathbf{R},+)$.

4) Prouver que, pour tout $F \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}^0(I,\mathbf{R}),\mathbf{R})$ tel que $F(\delta_a) = a$ pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathfrak{C}^0(I,\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(F) \oplus \Gamma.$$

Exercice 4

L'on note $\mathbf{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$, i.e. l'ensemble des sommes formelles $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Cet ensemble est muni de l'addition $(+)$ et la multiplication $(\cdot)$ usuelles des polynômes. Une dérivation δ de $\mathbf{Z}[X]$ est un endomorphisme δ du groupe $(\mathbf{Z}[X],+)$ vérifiant, pour tout couple $(P,Q) \in (\mathbf{Z}[X])^2$, la propriété additionnelle suivante :

$$\delta(P \cdot Q) = P \cdot \delta(Q) + Q \cdot \delta(P).$$

On note $\mathrm{Dér}(\mathbf{Z}[X])$ *l'ensemble des dérivations de* $\mathbf{Z}[X]$.

1) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Dér}(\mathbf{Z}[X])$, muni de la loi

$$\star\colon \mathrm{Dér}(\mathbf{Z}[X]) \times \mathrm{Dér}(\mathbf{Z}[X]) \to \mathrm{Dér}(\mathbf{Z}[X])$$

définie par $(\delta,\delta') \mapsto (\delta \star \delta'\colon a \mapsto \delta(a) + \delta'(a))$, est un groupe abélien.

2) Soient $D \in \mathrm{Dér}(\mathbf{Z}[X]))$, $n \in \mathbf{N}$, $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbf{Z}$. Calculer $D(P)$ en fonction de $\partial(P)/\partial X$ et $D(X)$.

3) Le groupe $(\mathrm{Dér}(\mathbf{Z}[X]),+)$ est-il libre ? En donner une famille génératrice.

Exercice 5

1) Montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ des automorphismes du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z},+)$ est isomorphe au groupe $(\mathbf{S}_3,\circ)$ des permutations de $\{1,2,3\}$.

2) Décrire l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z},\mathbf{S}_3)$.

3) Donner un groupe d'ordre 12 non abélien ayant exactement quatre 3-sous-groupes de Sylow. (*Vous devrez vérifier que votre candidat a les propriétés de la question.*)

4) Combien existe-t-il de tels groupes ?