207 Prolongement de fonctions : Exemples et applications

<u>Def 1</u>. Soient X et E deux espaces topologiques, $Y \subset X$. Soit $f : Y \to E$ une application. Un prolongement de f sur X est une application $g : X \to E$ telle que $g_{|Y} = f$.

I | Prolongement et continuité

1) Prolongement ponctuel

[GOU] p.16 <u>Def 2</u> : Soient E, F des espaces métriques. Soit $f : D \subset E \to F$ non définie en $a \in \bar{D} \setminus D$ telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$. La fonction définie sur $D \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ sur D et $g(a) = \ell$ est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.

[Pom] p.38 <u>Ex 3</u> : $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0.

<u>Ex 4</u> : $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ se prolonge par continuité en 0.

2) Prolongement par densité

[Pom] p.40 <u>Thm 5</u> : (Principe de prolongement des identités)
Soient f, g deux fonctions continues d'un espace topologique E dans un evn F. Si f et g coïncident sur une partie dense, alors elles sont égales.

[Pom] p.48 <u>Thm 6</u> : (Prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense)
Soient E, F deux espaces métriques, F complet. Soient A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application uniformément continue. Il existe une unique application $g : E \to F$ continue qui prolonge f. De plus, g est uniformément continue.

[Pom] p.49 <u>App 7</u> : Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées. ($f : [a,b] \to E$ est réglée si elle est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions en escalier).

<u>App 8</u>. Théorème de Plancherel : [Rud] p.225
Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors $\hat{f} \in L^2$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.
De plus l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de L^2 sur L^2.

3) Prolongement global

<u>Thm 9</u> : (Tietze - Urysohn) [Z-Q] p.202
Soient X un espace métrique, Y un fermé de X, $f : Y \to \mathbb{R}$ continue.
Alors f admet un prolongement continu $g : X \to \mathbb{R}$.

<u>App 10</u> : Si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée, alors X est compact. p.221

4) Prolongement des formes linéaires

<u>Thm 11</u> : (Hahn-Banach en dimension finie) [Rud] p.24
Soient E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, V un sev et f une forme linéaire sur V.
Alors il existe une forme linéaire g sur E telle que $g_{|V} = f$ et $\|g\| = \|f\|$.

<u>Cor 12</u> : $\forall x \in E$, $\|x\| = \max\left\{ \frac{\ell(x)}{\|\ell\|}, \ \ell \text{ forme linéaire non nulle sur } E \right\}$. p.24

<u>App 13</u> : F sev E. Alors F est dense dans E ssi toute forme linéaire continue qui s'annule sur F est nulle sur E. [Bre] p.67

II | Prolongement et différentiabilité

1) Prolongement et régularité

<u>Thm 14</u> : Soit f une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un evn E, et soit $a \in I$. [Pom] p.90
Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' possède une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

[Rou] p90 **Cte-ex 15** : Sans l'hypothèse de continuité le résultat est faux. Prendre $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

p90 **Ex 16** : Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. f est de classe C^∞.

p91 **App 17** : Existence de fonctions plateaux : soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$, constante égale à 1 sur $[a,b]$ et nulle sur $\mathbb{R} \setminus]a-\varepsilon ; b+\varepsilon[$

[Rou] p350 **Thm 18** : (Borel)
Soit $(a_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \geq 0$, $u^{(k)}(0) = a_k$.

p350 **App 19** : Toute fonction C^∞ sur $[a,b]$ avec des dérivées de tout ordre à droite en a et à gauche en b peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Prolongement et équations différentielles

I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
$f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

[2-Q] p353 On considère (E). $\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$, $x \in C^1(I, \Omega)$.

Déf 20 : • Une solution (x, J) de (E) est dite globale si $J = I$.
• Soient (x_1, J_1) et (x_2, J_2) deux solutions de (E). On dit que (x_2, J_2) prolonge (x_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in J_1$.
• Une solution (x, J) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

[2-Q] p371 **Thm 21** : (Théorème de sortie de tout compact)
Supposons f définie sur $]a,b[\times \mathbb{R}^n$.
Soit (x, J) une solution maximale de E, avec $J =]T_*; T^*[$.
Alors $\begin{cases} \text{ou bien } T^* = b \\ \text{ou bien } T^* < b \text{ et } \lim\limits_{t \to T^*} |x(t)| = +\infty \end{cases}$

et $\begin{cases} \text{ou bien } T_* = a \\ \text{ou bien } T^* > a \text{ et } \lim\limits_{t \to T_*} |x(t)| = \infty \end{cases}$

p371 **Cor 22** : (Critère de prolongement)
Soit (x, J) une solution de (E) avec $J =]\alpha, \beta[$, $a < \alpha < \beta < b$.
Si x est bornée au voisinage de β (resp. α), alors x peut être prolongée au delà de β (resp. au delà de α) en une solution de (E).

p371 **Ex 23** : Si $f :]a,b[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et bornée, alors toute solution de (E) est globale.
Par exemple, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le problème $\begin{cases} x'(t) = \frac{x^2(t)}{1 + x^2(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

III | Prolongement analytique

1) Comportement d'une série entière au bord du disque de convergence.

[2-Q] p50 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.
Pour $z \in D(0,1)$ on pose $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
On note $\Gamma = \partial D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} \, / \, |z| = 1 \}$.

[Z-Q] p.50-51

Def 24 : • $a \in \Gamma$ est dit régulier s'il existe un disque ouvert D_a centré en a tel que f admette un prolongement analytique dans $D \cup D_a$.
• $a \in \Gamma$ est dit singulier s'il n'est pas régulier.

On note A_r l'ensemble des points réguliers
A_s l'ensemble des points singuliers.

Ex 25 : Pour $\sum_0^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $A_r = \Gamma \setminus \{1\}$ et $A_s = \{1\}$.

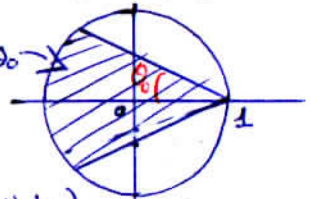
p.51

Thm 26 : Il y a toujours au moins un point singulier sur Γ, ie $A_s \neq \emptyset$.

[Gou] p.253 — DVPL

Thm 27 : (Théorème d'Abel angulaire)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RdC ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. Soit f la somme de cette série entière sur le disque unité.
Soit $\theta_0 \in [0; \pi/2[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1$ et $\exists \rho > 0$, $\exists \theta \in [-\theta_0; \theta_0]$, $z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.



p.254

Thm 28 : (Théorème Taubérien faible)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RdC égal à 1.
Soit f la somme de cette série entière sur le disque unité.
On suppose : $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = S$.
Alors si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$

2) Fonctions holomorphes

[O-A] p.53

Thm 29 : (Théorème des zéros isolés)
Si f est une fonction analytique dans un ouvert connexe U et si f n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation.

[O-A] p.54

Thm 30 : (Principe du prolongement analytique)
Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

[O-A] p.140 — DVPL

Def 31 : On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.
Muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \rho\,dx$, c'est un espace de Hilbert.
Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynomes orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$.

p.140

Thm 32 : Si $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,dx < \infty$,
alors les polynômes $(P_n)_n$ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

[Z-Q] p.20

Ex 33 : (Fonction ζ de Riemann)
Pour $Re(s) > 1$, la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe.
Elle peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} / Re(s) > 0\} \setminus \{1\}$

DVPL — [Z-Q] p.313

Ex 34 : (Fonction Γ d'Euler)
Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.
La fonction Γ peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéros et admettant des pôles simples en les $-n$, $n \in \mathbb{N}$.

[GOU] Gourdon, Analyse, 2ème édition
[POM] Pommelet, Agreg de maths, Cours d'analyse
[RUD] Rudin, Analyse réelle et complexe, 3ème édition
[Z-Q] Zuily, Queffélec, Analyse pour l'agrégation, 4ème édition
[ROU] Rouvière, Petit guide de calcul différentielle; 2ème édition revue et augmentée
[O-A] Beck, Malick, Peyré, Objectif Agrégation, 2ème édition