Algèbre linéaire 2 - CC1 - Correction

D Cacitti

2024-2025

1 Questions de cours

1. (a) Nous avons
$$X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E(u)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}X'.$$

   (b) Nous avons
      i. Comme l'application f est linéaire, nous avons $0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}(f)$.
      ii. Soient $u, v \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe $x, y \in E$ tels que $u = f(x), v = f(y)$. Ainsi, par linéarité de l'application f,
$$\lambda u + v = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \in \mathrm{Im}(f).$$

   Par conséquent le sous-ensemble $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace F.

2. Nous avons
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}.$$

3. Nous avons, pour tout $j \in \{1, ..., p\}$,
$$\begin{aligned}
(g \circ f)(e_j) &= g(f(e_j)) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} g(f_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sum_{k=1}^{m} a_{ki} g_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij}\right) g_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} (AB)_{kj} g_k
\end{aligned}$$
où l'on note $A = \mathcal{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f)$. Ainsi
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(g \circ f) = ((AB)_{kj})_{1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq p} = AB = \mathcal{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f).$$

2 Exercice

1. Soient $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}
p(\lambda(x, y, z) + (a, b, c)) &= p((\lambda x + a, \lambda y + b, \lambda z + c)) \\
&= (2(\lambda x + a) + \lambda y + b + 2(\lambda z + c), \lambda y + b, -(\lambda x + a) - (\lambda y + b) - (\lambda z + c)) \\
&= \lambda(2x + y + 2z, y, -x - y - z) + (2a + b + 2c, b, -a - b - c) \\
&= \lambda p(x, y, z) + f(a, b, c).
\end{aligned}$$

   Donc l'application p est linéaire.

2. Nous avons
$$p(e_1) = p(1,0,0) = (2,0,-1), \quad p(e_2) = p(0,1,0) = (1,1,-1)$$
et
$$p(e_3) = p(0,0,1) = (2,0,-1).$$

3. Nous avons
$$p^2(e_1) = p(p(e_1)) = p(2,0,-1) = (2,0,-1), \quad p^2(e_2) = p(p(e_2)) = p(1,1,-1) = (1,1,-1)$$
et
$$p^2(e_3) = p(2,0,-1) = (2,0,-1).$$
Nous pouvons en déduire que
$$p^2(e_1) = p(e_1), \quad p^2(e_2) = p(e_2), \quad p^2(e_3) = p(e_3).$$
Ainsi, comme l'application p est linéaire, nous avons $p^2(u) = p(u)$ pour tout $u \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$ car (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.
   - Nous avons, comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et $p(e_1) = p(e_3)$,
   $$\text{Im}(p) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3)) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2)) = \text{Vect}((2,0,-1),(1,1,-1))$$
   avec $(2,0,-1), (1,1,-1)$ non colinéaires donc la famille $((2,0,-1),(1,1,-1))$ est une base de $\text{Im}(p)$.
   - Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x,y,z) \in \ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ si et seulement si
   $$(0,0,0) = p(x,y,z) - (x,y,z) = (x+y+2z, 0, -x-y-2z)$$
   i.e.
   $$x + y + 2z = 0.$$
   En particulier les vecteurs non colinéaires $(2,0,-1), (1,1,-1)$ sont dans $\ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$. Ainsi
   $$\text{Vect}((2,0,-1),(1,1,-1)) \subset \ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}).$$
   En particulier $2 \leq \dim(\ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}))$. Or $\dim(\ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})) < 3$ car $p \neq \text{id}_{\mathbb{R}^3}$. Donc $2 = \dim(\ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}))$ puis
   $$\text{Vect}((2,0,-1),(1,1,-1)) = \ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}).$$
   Par conséquent $((2,0,-1),(1,1,-1))$ est une base de $\ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   - Comme les sous-espaces $\text{Im}(p)$ et $\ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ admettent la même base ils sont égaux.

5.
   - Nous avons déjà par théorème du rang
   $$\dim(\ker(p)) + \dim(\text{Im}(p)) = \dim(\mathbb{R}^3).$$
   - Soit $u \in \ker(p) \cap \text{Im}(p) = \ker(p) \cap \ker(p - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ d'après la question précédente. Donc
   $$p(u) = (0,0,0) = p(u) - u.$$
   Ainsi
   $$u = (0,0,0).$$

   Par conséquent nous avons
   $$\ker(p) \oplus \text{Im}(p) = \mathbb{R}^3.$$

3 Problème

1. Comme à la question 1 de l'exercice précédent.
2. Nous avons
$$u(e_1) = u(1,0,0) = (4,1,1) = 4e_1 + e_2 + e_3, \quad u(e_2) = u(0,1,0) = (1,4,1) = e_1 + 4e_2 + e_3$$
et
$$u(e_3) = u(0,0,1) = (1,1,4) = e_1 + e_2 + 4e_3.$$
Donc
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$
3. - Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors
$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(\phi) & \iff (4x+y+z, x+4y+z, x+y+4z) = (0,0,0) \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}{\iff} (4x+y+z, -3x+3y, -15x-3y) = (0,0,0) \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2}{\iff} (4x+y+z, -3x+3y, -18y) = (0,0,0) \\ & \iff (x,y,z) = (0,0,0). \end{aligned}$$
Donc $\ker(\phi) = \{0\}$ et une base de $\ker(\phi)$ est alors la famille vide.
   - Nous avons alors, par théorème du rang,
$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(\mathrm{Im}(\phi)).$$
Donc
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(\phi).$$
Autrement dit l'application ϕ est également surjective donc est un automorphisme.
   - Comme $\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{Im}(\phi)$.
4. On peut montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc en est une base. On peut également dire que, en développant par rapport à la première ligne,
$$\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, e'_3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0.$$
5. Nous avons
$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \mathrm{Com}(P)^T = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
6. Nous avons
$$u(e'_1) = u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) = 5e'_1,$$
$$u(e'_2) = u(e_2) - u(e_3) = 3e'_2$$
et
$$u(e'_3) = u(e_1) - u(e_3) = 3e'_3.$$
Donc
$$M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. • Nous avons alors
$$(M')^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

• Or, d'après la formule de changement de bases,
$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = PM'P^{-1}.$$

Donc
$$\begin{aligned} M^n &= P(M')^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 5^n & 5^n \\ -3^n & 2\times 3^n & -3^n \\ 2\times 3^n & -3^n & -3^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2\times 3^n & 5^n-3^n & 5^n-3^n \\ 5^n-3^n & 5^n+2\times 3^n & 5^n-3^n \\ 5^n-3^n & 5^n-3^n & 5^n+2\times 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = MX_{n-1}$.

9. Donc, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et les questions précédentes, nous avons
$$\begin{aligned} X_n &= M^n X_0 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n+2\times 3^n & 5^n-3^n & 5^n-3^n \\ 5^n-3^n & 5^n+2\times 3^n & 5^n-3^n \\ 5^n-3^n & 5^n-3^n & 5^n+2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3\times 3^n \\ -3\times 3^n \end{pmatrix} \\ &= 3^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = 0, \quad b_n = 3^n, \quad c_n = -3^n.$$