Le Mans Université

Département de Mathématiques
W. Sabbagh

Année Universitaire 2024-2025
Lundi 14 Octobre 2024

Examen 1- Licence 2- Algèbre linéaire

- *Le problème et les exercices sont indépendants.*
- *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
- *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
- *Tout document de cours est interdit.*

---

1 Questions de cours (8pts)

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}$ un base de F. Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
   (a) Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Soit $u \in E$. Quel est le lien entre le vecteur colonne X des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne X' des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$? Le démontrer.
   (b) Montrer que $Im(f)$ est un sous espace vectoriel.

2. Donner la définition de la trace d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

3. On considère trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies :
   - E de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
   - F de dimension n, muni d'une base $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$.
   - G de dimension m, muni d'une base $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$.
   Soient également $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, et $h = g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
   On note $M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(f) = (b_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant p}}$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ et $M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g) = (a_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ 1 \leqslant l \leqslant n}}$ la matrice de g dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Montrer que
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{G}}(g \circ f) = M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g) M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f).$$

2 Exercice

Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur
$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z)$$
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1), p(e_2)$ et $p(e_3)$.
3. Calculer $p^2(e_1), p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$. Que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$?
4. Donner une base de $\mathrm{Im}(p)$ et une base de $\ker(p - \mathrm{Id})$. Montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
5. Montrer que $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$.

3 Problème

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application ϕ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} u : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & u((x, y, z)) = (4x + y + z, x + 4y + z, x + y + 4z) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice M de l'endomorphisme ϕ relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\ker(\phi)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$. ϕ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? Justifiez votre réponse.
4. On considère le système de vecteurs $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_3 \end{cases}$$

   Montrer que le système $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et calculer son inverse P^{-1}.
6. Déterminer la matrice M' de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}'$.
7. Calculer $(M')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de la matrice $(M)^n$ en fonction de n.
8. On considère les suites récurrentes (a_n), (b_n) et (c_n) de nombres réels définies par les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 4b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + 4c_{n-1} \end{cases}$$

   avec :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ c_0 = -1 \end{cases}$$

   En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont (a_n), (b_n) et (c_n). Donner une relation de récurrence entre X_n et X_{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Déduire de ce qui précède les expressions des suites (a_n), (b_n) et (c_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.