Licence 2

Année Universitaire 2022-2023
Mercredi 14 décembre 2022

Examen 2 - Algèbre linéaire 2 - Première Session

— *Le problème et les exercices sont indépendants.*
— *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
— *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
— *Tout document de cours est interdit.*

1 Questions de cours

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir le déterminant pour que f soit un isomorphisme (bien introduire les notations).
2. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f si et seulement si $\det(f - \lambda Id_E) = 0$.
3. Montrer qu'un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si ses espaces propres sont supplémentaires dans E. Attention à bien introduire les notations.
4. A quelle condition nécessaire et suffisante faisant intervenir le polynôme caractéristique un endomorphisme est-il diagonalisable ? Donner la démonstration.
5. Montrer que si f est trigonalisable, alors le polynôme caractéristique de f est scindé.
6. Donner la définition de polynôme minimal.

2 Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et

$$P_f(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Montrer que $a_0 = \det(f)$ et $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(f)$.

3 Problème

Dans tout le problème, on considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base quelconque de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, l'application dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est définie par :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_f \in \mathbb{R}[X]$ de f (pour le calcul on commencera par l'opération suivante sur les colonnes de la matrice considérée : $C_2 \leftarrow C_2 - (C_1 + C_3)$).
2. Montrer que la dimension de l'espace propre E_1 est $\dim(E_1) = 1$ et en déterminer une base $\{v_1\}$ de E_1 (en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$).
3. L'endomorphisme est-il diagonalisable ? En déduire le polynôme minimal de f.
4. Sans calculs, que peut-on dire de la dimension de l'espace propre E_2 ? Justifier.
5. Déterminer une base de E_2.

Partie II

1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par $Q(X) = (X-1)^2$.
   (a) Q peut-il être un polynôme annulateur de f ? Justifier sans faire de calculs.
   (b) Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de $Q(f)$.
2. (a) Montrer que $E_1 \subset Ker(Q(f))$.
   (b) Trouver v_2 tel que $f(v_2) = v_2 + v_1$. Montrer que $v_2 \in Ker(Q(f))$.
   (c) En déduire que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $Ker(Q(f))$.
3. On note $\{v_3\}$ la base de E_2 déterminée à la question I.5. Montrer que $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E.
4. Déterminer la matrice $B = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{C}$.
5. En déduire une expression de A en fonction de B.