L2 - Algèbre linéaire - CC2 2023 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

1 Question de cours

1. (a) On suppose par l'absurde que $\lambda = 0$. Alors il existe $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $AX = \lambda X = 0_n$. Ainsi
$$X = A^{-1}AX = A^{-1}0_n = 0_n$$
ce qui est absurde. Donc $\lambda \neq 0$.

   (b) Soit X vecteur propre de A associé à λ. Alors $AX = \lambda X$. Ainsi
$$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda X = \frac{1}{\lambda}A^{-1}AX = \frac{1}{\lambda}X.$$
De plus $X \neq 0_n$ car X est un vecteur propre. Donc X est un vecteur propre de A^{-1} associé à $\frac{1}{\lambda}$.

2. (a) On suppose par l'absurde que f est inversible. Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$. Donc
$$0 = f^n \circ f^{-1} = f^{n-1}.$$
Puis
$$0 = f^{n-1} \circ f^{-1} = f^{n-2}.$$
On en déduit donc, par itérations successives, que $f^k = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. En particulier $f = 0$ ce qui est absurde car f est inversible.

   (b) Le polynôme X^n est annulateur de f. Donc les valeurs propres de f sont comprises dans l'ensemble des racines de X^n égal à $\{0\}$. Ainsi la seule valeur propre de f est 0. En particulier $E_0(f) = \ker(f)$.

3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour tout espace vectoriel E de dimension finie, pour tout $f \in L(E)$, $P_f(f) = 0$.

2 Problème

Partie I

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
P_f &= P_A \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)[(2-X)(1-X)+1] + (-1)(-1) - (2-X) \\
&= (1-X)[X^2-3X+3] + X - 1 \\
&= (1-X)(X^2-3X+2) \\
&= (1-X)(X-1)(X-2) \\
&= (X-1)^2(2-X).
\end{aligned}$$

Ainsi P_f est scindé. Donc f est trigonalisable.

2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} u\in E_1(f) &\iff A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & z &=& 0\\ -x &+& y &+& z &=& 0\\ x &-& y & & &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff z=0, x=y. \end{aligned}$$

Donc $E_1(f)=\mathrm{Vect}((1,1,0))$ est de dimension 1 et $u=(1,1,0)$ est un vecteur non nul de cet espace propre.

3. Soit $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v)=u$ i.e.

$$(A-I_3)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & z &=& 1\\ -x &+& y &+& z &=& 1\\ x &-& y & & &=& 0\end{array}\right.$$

i.e. $z=1$ et $x=y$. Par conséquent le vecteur $v=(1,1,1)$ convient.

4. Soit $w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} w\in E_2(f) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & & &+& z &=& 0\\ -x & & &+& z &=& 0\\ x &-& y &-& z &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff x=z, y=0. \end{aligned}$$

Donc $E2(f)=\mathrm{Vect}((1,0,1))$ et $w=(1,0,1)$ est un vecteur propre de f associé à 2.

5. Les vecteurs (u,v) sont libres dans $E_1(f)$ car non colinéaires et $E_1(f)\oplus E_2(f)$. Donc (u,v,w) est une famille libre de $3=\dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Ainsi (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Nous avons

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

car $f(u)=u, f(v)=u+v, f(w)=2w$.

7. Nous avons

$$f^2(v)=f(u)+f(v)=u+u+v=2u+v,$$
$$f^3(v)=2f(u)+f(v)=3u+v.$$

Donc, par itérations successives, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$f^k(v)=ku+v.$$

8. Nous avons donc

$$T^k=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^k)=\begin{pmatrix} 1 & k & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}$$

car $f^k(u)=1^ku=u, f^k(v)=ku+v, f^k(w)=2^kw$.

9. Nous avons donc, par formule de changement de bases,

$$A=PTP^{-1}$$

avec

$$P=M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PT^kP^{-1}$$

avec T^k obtenue à la question précédente et P^{-1} par inversion de P par la méthode du pivot de Gauss ou la formule $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} Com(P)^T$.

Partie II

1. Nous avons

$$\begin{array}{rcl}
P_B & = & \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1, L_3 \leftarrow L_3+XL_1}{=} & \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ 1-X & 1-X & 0 \\ m+(1+m)X-X^2 & m-1+(1+m)X & 0 \end{vmatrix} \\
& = & \begin{vmatrix} 1-X & 1-X \\ m+(1+m)X-X^2 & m-1+(1+m)X \end{vmatrix} \\
& = & (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+(1+m)X-X^2 & m-1+(1+m)X \end{vmatrix} \\
& = & (1-X)(m-1+(1+m)X-m-(1+m)X+X^2) \\
& = & (1-X)(X^2-1) \\
& = & -(1-X)^2(1+X).
\end{array}$$

Donc les valeurs propres de B sont les racines -1 et 1 de P_B.

2. Déterminons $E_1(B)$ en fonction de m. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(B) & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & (1+m)y & + & z & = & 0 \\ -mx & - & (m+1)y & - & z & = & 0 \\ mx & + & (m-1)y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2+l_1, L_3 \leftarrow L_3-L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & (1+m)y & + & z & = & 0 \\ & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & (1+m)y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & my & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

Donc si $m = 0$ alors $E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 2. Ainsi $\dim(E_1(B)) + \dim(E_2(B)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ainsi B est diagonalisable. Sinon $m \neq 0$ et dans ce cas

$$X \in E_1(B) \iff x = -y = z,$$

d'où $E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1 et B n'est pas diagonalisable.

3. On sait que $m_B \mid P_B$ et que les valeurs propres -1 et 1 sont racines de m_B. Ainsi nous avons deux possibilités :
   — Soit $m_B = (X-1)(X+1)$. Dans ce cas m_B est scindé à racines simples. Donc B est diagonalisable. Ainsi, d'après la question précédente, $m = 0$.
   — Soit $m_B = (X-1)^2(X+1)$. Dans ce cas m_B n'est pas scindé à racines simples. Donc B n'est pas diagonalisable. Ainsi, d'après la question précédente, $m \neq 0$.

   Par conséquent, par contraposée,
   — Si $m =\neq 0$ alors $m_B = (X-1)(X+1)$.
   — Si $m = 0$ alors $m_B = (X-1)^2(X+1)$.