Le Mans Université

Département de Mathématiques
W. Sabbagh

Année Universitaire 2023-2024
Lundi 18 décembre 2023

Examen 2 - Licence 2 - Algèbre linéaire

- *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
- *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
- *Tout document de cours est interdit.*

---

1 Questions de cours

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A.
   (a) Montrer que $\lambda \neq 0$.
   (b) Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propore λ, alors il est vecteur propre de A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.
2. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}\,\text{ou}\,\mathbb{C}$), et f un endomorphisme de E. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $f^n = 0$.
   (a) Montrer que f n'est pas inversible.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
3. Énoncer le théorme de Cayley Hamilton.

2 Problème

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie I

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propore 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
3. Chercher le vecteur v tel que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2.
5. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$.

7. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
8. Déduire T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
9. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie II

Soit $m \in \mathbb{R}$ et B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de B et montrer que les valeurs propores de B sont -1 et 1.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice est -elle diagonalisable ? (justifier).
3. Déterminer suivant les valeurs de m le pôlynome minimal de B (justifier).