# L2 - Algèbre linéaire - CC2 2023 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

## 1 Question de cours

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\} \\ &\iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non injective} \quad \text{car } f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ linéaire} \\ &\iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non bijective} \quad \text{car } f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ endomorphisme} \\ &\iff P_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda$ est une valeur propre de $f$ si et seulement si $\det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$.

(b) Nous avons par définition

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_E).$$

On suppose par l'absurde que $\alpha < \dim(E_\lambda)$. Alors il existe une famille libre $(v_1, ..., v_{\alpha+1})$ de $\alpha + 1$ vecteurs dans $E_\lambda$. On complète cette famille en une base $b$ de $E$. Alors

$$M_{bb}(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_{\alpha+1} & (*) \\ (0) & (*) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P_f = (\lambda - X)^{\alpha+1} Q, \quad Q \in \mathbb{K}[X],$$

ce qui est absurde car $\alpha$ est la multiplicité de $\lambda$ en tant que racine de $P_f$. Par conséquent

$$\dim(E_\lambda) \leq \alpha.$$

2. Nous avons $(-1)^n = -1$ car $n$ impair, d'où

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

i.e.

$$\det(A) = 0.$$

3. Le polynôme minimal $m_1$ est le polynôme unitaire de plus petit degré positif qui annule $A$.
4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, nous avons $P_A(A) = 0_{n,n}$. De plus en effectuant la division euclidienne de $P_A$ par $m_A$, nous obtenons l'existence de $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels

$$P_A = Q m_A + R, \quad \deg(R) < \deg(m_A).$$

Ainsi

$$0_{n,n} = P_A(A) = Q(A) m_A(A) + R(A) = Q(A) \times 0_{n,n} + R(A) = R(A).$$

Or $\deg(R) < \deg(m_A)$, donc, par minimalité du degré de $m_A$, nous obtenons $R_A = 0$. Par conséquent $P_A = Q m_A$ i.e.

$$m_A \mid P_A.$$

## 2 Problème

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
P_{A_m} &= \det(A_m - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 2 & m-X \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{dév. 1ère colonne}}{=} (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 2 & m-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)[(1-X)(m-X) - 2\times 0] \\
&= (1-X)^2(m-X)
\end{aligned}$$

2. Nous avons alors

$$P_{A_m} = (1-2X+X^2)(m-X) = -X^3 + (m+2)X^2 - (1+2m)X + m.$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_{A_m}(A_m) = 0_{3,3}$, d'où

$$-A_m^3 + (m+2)A_m^2 - (1+2m)A_m + mI_3 = 0_{3,3}$$

i.e.

$$mI_3 = A_m^3 - (m+2)A_m^2 + (1+2m)A_m = Q(A_m).$$

3. On suppose $m \neq 0$ Nous obtenons alors

$$I_3 = \frac{1}{m}Q(A_m) = \frac{1}{m}\left(A_m^2 - (m+2)A_m + (2m+1)I_3\right)A_m.$$

Donc $A_m$ est inversible et

$$\begin{aligned}
A_m^{-1} &= \frac{1}{m}\left(A_m^2 - (m+2)A_m + (2m+1)I_3\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & m+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m^2 \end{pmatrix} - (m+2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix} + (2m+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 1-(m+2)+2m+1 & 4-(m+2) & m+1-(m+2) \\ 0 & 1-(m+2)+2m+1 & 0 \\ 0 & 2m+2-(m+2)2 & m^2-(m+2)m+2m+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} m & 2-m & -1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. (a) Nous avons $m_{A_3} \mid P_{A_3}$, que $m_{A_3}$ est unitaire et que $m_{A_3}$ et $P_{A_3}$ ont les mêmes racines 1 et $m = 3$ (à savoir les valeurs propres de $A_3$). Donc

$$m_{A_3} \in \{(X-1)(X-3), (X-1)^2(X-3)\}.$$

Or

$$(I_3 - A_3)(3I_3 - A_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3}.$$

Donc

$$m_{A_3} = (X-1)(X-3).$$

(b) Nous avons donc $m_{A_3}$ scindé à racines simples. Donc $A_3$ est diagonalisable.

(c) • Pour $\lambda = 1$ : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A_1) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff y + z = 0, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$E_1(A_1) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

- Pour $\lambda = 3$ : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} X \in E_3(A_1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = 0, \quad z = 2x. \end{aligned}$$

Donc

$$E_1(A_1) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Par conséquent, en notant

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

nous obtenons, par formule de changement de bases,

$$P_3^{-1} A_3 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. On suppose que $m \notin \{1, 3\}$. Pour montrer que $A_m$ n'est pas diagonalisable, on peut montrer qu'il y a un problème avec $E_1$ i.e. que $\dim(E_1(A_m)) = 1 < 2$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} X \in E_1(A_m) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ 2y + (m-1)z = 0 \end{cases} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ (m-3)z = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = -z = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{car } m \neq 3. \end{aligned}$$

Donc

$$E_1(A_m) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Par conséquent

$$\dim(E_1(A_m)) = 1 < 2.$$

Donc $A_m$ n'est pas diagonalisable.

6. (a) D'après la question 5 où $m \neq 1$ n'a pas servi, $A_1$ n'est pas diagonalisable.

   (b) Toujours d'après la question 5, nous avons

$$E_1(A_1) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

   Donc $\dim(E_1(f)) = 1$ et $u = (1, 0, 0)$ est un vecteur non nul de ce sous-espace propre.

(c) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 1 \\ 2y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad y = 0, \quad z = 1, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc le vecteur $v = (0, 0, 1)$ vérifie que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.

(d) Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(w) = u + v \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 1 \\ 2y & & & = & 1 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc le vecteur $w = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vérifie que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(w) = u + v$.

(e) Nous avons

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Donc la famille $(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(f) Nous avons directement

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(g) Nous avons $T = I_3 + C$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$C^3 = 0_{3,3}$$

et

$$\forall k \geq 3, \quad C^k = 0_{3,3}.$$

(h) Comme les matrices $I_3$ et $C$ commutent, nous avons, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
T^k &= (I_3 + C)^k \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} I_3^{k-j} C^j \\
&= I_3 + kC + \frac{k(k-1)}{2} C^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(i) Nous obtenons alors $A^k$ par $A_1^k = PT^kP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$P^{-1}$ par méthode du pivot de Gauss ou de la comatrice, et $T^k$ par la question précédente. Il ne reste plus qu'à faire les deux produits matriciels.