Algèbre linéaire 2 - DM 1 - Correction

D Cacitti

2024-2025

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Question 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre dans l'espace E si, pour tout $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$, nous avons $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Par exemple la famille $(1, X)$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

On dit que la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de l'espace E si, pour tout $x \in E$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Par exemple la famille $(1, X, X+1, X^2)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$.

On dit que la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de l'espace E s'il s'agit d'une famille libre et génératrice de l'espace E. Par exemple la famille $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_3[X]$.

On considère également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F et une application linéaire $f \in L(E, F)$.

Question 2. L'image de l'application linéaire f est définie par

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x), \quad x \in E\}.$$

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de l'espace F :

1. Nous avons $f(0_E) = 0_F$ car l'application f est linéaire. Donc $0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}(f)$.
2. Soient $u, v \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe $x, y \in E$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$. Ainsi, comme l'application f est linéaire,

$$\lambda u + v = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \in \mathrm{Im}(f).$$

Le noyau de l'application linéaire f est défini par

$$\ker(f) = \{x \in E, \quad f(x) = 0_F\}.$$

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de l'espace E :

1. Nous avons $f(0_E) = 0_F$ car l'application f est linéaire. Donc $0_E \in \ker(f)$.
2. Soient $x, y \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc, comme l'application f est linéaire,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda \times 0_F + 0_F = 0_F.$$

Ainsi $\lambda x + y \in \ker(f)$.

Question 3. D'après le théorème du rang, nous avons $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. Or nous avons également $\dim(\ker(f)) \geq 0$. Donc

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) \leq \dim(E).$$

D'après la question précédente, l'image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace F, d'où

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(F).$$

Question 4. D'après le théorème du rang et la question précédente, nous avons

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq \dim(E) - \dim(F).$$

Question 5. On suppose qu'il existe une application linéaire injective $f \in L(E,F)$. Alors $\ker(f) = \{0_E\}$. Donc, d'après la question précédente, $0 = \dim(\ker(f)) \geq \dim(E) - \dim(F)$ i.e.

$$\dim(E) \leq \dim(F).$$

Par exemple l'application linéaire $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P' \in \mathbb{R}_1[X]$ ne peut pas être injective car $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 > 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$ ou parce que $(X+1)' = 1 = X'$ par exemple.

On suppose qu'il existe une application linéaire surjective $f \in L(E,F)$. Alors $\mathrm{Im}(f) = F$. Donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(F) + \dim(\ker(f)) \geq \dim(F).$$

Par exemple l'application linéaire $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto X \times P \in \mathbb{R}_3[X]$ ne peut pas être surjective parce que le polynôme 1 n'admet pas d'antécédent par l'application linéaire f par exemple.

Question 6. On considère trois entiers $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors leur produit matriciel est $AB \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$ défini par

$$\forall i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., p\}, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}.$$

Question 7. Nous avons, par interversion de sommes finies,

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{p} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{q} (BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA).$$

Question 8. Nous avons

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

et

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n.$$

Donc $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Question 9. On suppose que les espaces E et F soient de dimensions finies n, p. On considère une base $e = (e_1, ..., e_n)$ de l'espace E, une base $f = (f_1, ..., f_p)$ de l'espace F et l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{ef}(u) \end{array}.$$

Soient $u, v \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$,

$$(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{p} \phi(u)_{ij} f_i + \sum_{j=1}^{p} \phi(v)_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda \phi(u)_{ij} + \phi(v)_{ij}) f_i.$$

Donc

$$\phi(\lambda u + v) = \mathrm{Mat}_{ef}(\lambda u + v) = (\lambda \phi(u)_{ij} + \phi(v)_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} = \lambda \phi(u) + \phi(v).$$

On considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires V, W de l'espace E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 10. La projection p sur le sous-espace V parallèlement au sous-espace W est définie par

$$p : \begin{array}{ccc} E = V \oplus W & \longrightarrow & E \\ x = x_V + x_W & \longmapsto & x_V. \end{array}$$

La symétrie s par rapport au sous-espace V parallèlement au sous-espace W est définie par

$$s : \begin{array}{ccc} E = V \oplus W & \longrightarrow & E \\ x = x_V + x_W & \longmapsto & x_V - x_W. \end{array}$$

Question 11. Soit $f \in L(E)$.

L'endomorphisme f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.

L'endomorphisme f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Question 12. On considère la projection p sur le sous-espace V parallèlement au sous-espace W. Alors

$$\ker(p) = \{x = x_V + x_W \in E = V \oplus W, \quad 0_E = p(x) = x_V\} = W.$$

Donc la projection p est injective si et seulement si $W = \{0_E\}$. Dans ce cas $V = E$ et $p = \mathrm{id}_E$. De plus

$$\mathrm{Im}(p) = \{p(x), \quad x \in E\} = \{x_V, \quad x = x_V + x_W \in E = V \oplus W\} = V.$$

Donc la projection p est surjective si et seulement si $V = E$. Par conséquent la projection p est bijective si et seulement si $p = \mathrm{id}_E$.

On considère la symétrie s par rapport au sous-espace V parallèlement au sous-espace W. Alors, d'après la question précédente, $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Par conséquent l'application s est bijective et $s^{-1} = s$. En particulier l'application s est injective et surjective.

Question 13. On considère une base b de l'espace E.

On considère une projection $p \in L(E)$. Alors, d'après la question 11, $p \circ p = p$. Donc

$$\mathrm{Mat}_b(p) = \mathrm{Mat}_b(p \circ p) = \mathrm{Mat}_b(p) \times \mathrm{Mat}_b(p) = (\mathrm{Mat}_b(p))^2.$$

On considère une symétrie $s \in L(E)$. Alors, d'après la question 11, $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Donc

$$I_n = \mathrm{Mat}_b(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_b(s \circ s) = \mathrm{Mat}_b(s) \times \mathrm{Mat}_b(s) = (\mathrm{Mat}_b(s))^2.$$