

Algèbre linéaire 2 - DM 1

D. Cacitti-Holland

2024-2025

On prendra soin de bien introduire toutes les notations.

Question 1. Donner la définition et un exemple de famille libre. Idem pour une famille génératrice. Idem pour une base.

Question 2. Donner la définition de l'image d'une application linéaire. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel. Idem pour le noyau d'une application linéaire.

Question 3. Montrer que la dimension de l'image d'une application linéaire est inférieure à la dimension de l'espace de départ et aussi à la dimension de l'espace d'arrivée.

Question 4. Montrer que la dimension du noyau d'une application linéaire est supérieure à la différence entre la dimension de l'espace de départ et la dimension de l'espace d'arrivée.

Question 5. Que peut-on dire des dimensions de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée s'il existe une application linéaire injective entre les deux ? Le justifier et donner un contre-exemple le cas échéant. Faire de même avec une application linéaire surjective.

Question 6. Donner la définition du produit entre deux matrices.

Question 7. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Question 8. Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AB \in GL_n(\mathbb{K})$.

Question 9. On considère l'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans une certaine base au départ et une certaine base à l'arrivée. Montrer que cette application est linéaire.

Question 10. Donner la définition d'un projecteur vectoriel et d'une symétrie vectorielle.

Question 11. Que peut-on dire $f \circ f$ si f est une projection vectoriel ou une symétrie vectorielle ?

Question 12. Que peut-on dire de l'injectivité, de la surjectivité ou de la bijectivité d'une projection vectorielle ? Le justifier. Faire de même avec une symétrie vectorielle.

Question 13. Quelle relation vérifie la matrice d'une projection vectorielle. Le justifier. Faire de même avec une symétrie vectorielle.