Algèbre linéaire 2 - Interro 1 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

Question 1. La dimension de l'espace $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ est $n \times p$ et une base de cette espace est la famille $(E_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ où, pour tout $i \in \{1,...,n\}$ et $j \in \{1,...,p\}$, E_{ij} est la matrice de taille $n \times p$ avec un 1 en position (i,j) et des zéros ailleurs.

Question 2. On considère trois entiers $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors leur produit matriciel est $AB \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$ défini par

$$\forall i \in \{1,...,m\}, j \in \{1,...,p\}, \quad (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Question 3.

1. <u>On suppose</u> $n > p$.
   Par théorème du rang, nous avons

   $$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

   Donc

   $$\dim(\ker(f)) = n - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq n - \dim(F) = n - p > 0,$$

   où l'inégalité centrale est justifiée par l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Ainsi nous ne pouvons pas avoir $\dim(\ker(f)) = 0$ i.e. $\ker(f) = \{0\}$. Donc nous ne pouvons pas avoir l'injectivité de l'application f. En conclusion l'assertion est vraie.

2. <u>On suppose que</u> l'application f est surjective. Alors $\mathrm{Im}(f) = F$. Ainsi

   $$\dim(\mathrm{Im}(f)) = p.$$

   Donc le théorème du rang donne

   $$n = \dim(E) = \underbrace{\dim(\ker(f)}_{\geq 0} + \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq \dim(\mathrm{Im}(f)) = p.$$

   Autrement dit $n \geq p$ avec $n > p$ dans certains cas que l'on peut expliciter. En effet par exemple pour $E = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ définie par

   $$\forall (x,y) \in E, \quad f(x,y) := x,$$

   nous avons la surjectivité de l'application f et $n = 2 > 1 = p$. L'assertion est donc fausse. (Le contre-exemple suffisait à conclure)

Question 4. Montrons que l'application $\Phi := \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{F}}$ est linéaire. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\underline{\Phi(\lambda f + g) =} \begin{pmatrix} M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_1)) & \dots & M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_p)) \end{pmatrix},$$

avec, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$M_{\mathcal{F}}((\lambda f + g)(e_j)) = M_{\mathcal{F}}(\lambda f(e_j) + g(e_j)).$$

Or si l'on note

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i, \quad g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i,$$

alors, par linéarité des applications f et g,

$$\lambda f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ij} + b_{ij}) f_i.$$

Donc

$$M_{\mathcal{F}}(\lambda f(e_j) + g(e_j)) = (\lambda a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n} = \lambda (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} + (b_{ij})_{1 \leq i \leq n} = \lambda M_{\mathcal{F}}(f(e_j)) + M_{\mathcal{F}}(g(e_j)).$$

Par conséquent

$$\Phi(\lambda f + g) = \lambda M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(f) + M_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(g) \underline{= \lambda \Phi(f) + \Phi(g)}.$$

Variante de rédaction : Soient $u, v \in L(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $j \in \{1, ..., p\}$,

$$(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \Phi(u)_{ij} f_i + \sum_{j=1}^{n} \Phi(v)_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \Phi(u)_{ij} + \Phi(v)_{ij}) f_i.$$

Donc

$$\Phi(\lambda u + v) = \mathrm{Mat}_{ef}(\lambda u + v) = (\lambda \Phi(u)_{ij} + \Phi(v)_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = \lambda \Phi(u) + \Phi(v).$$