Algèbre linéaire 2 - TD4 - Correction

D Cacitti-Holland

2024-2025

Exercice 1.

1. Nous avons $f(u_1) = 0 \times u_1 + 2 \times u_1$ et $f(u_2) = 1 \times u_1 + 2 \times u_2$. Donc
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. <u>Rédaction matricielle</u> Nous avons
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(x,y)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}((x,y))$$
avec, en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$,
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}((x,y)) = \underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})}_{=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}}\underbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}((x,y))}_{=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$
et
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \times 3 - 1 \times 2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$
Par conséquent les coordonnées de $f(x,y)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(-2x + y, 2x)$.
<u>Rédaction directe</u> : La famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x,y) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2).$$
Donc, après résolution du système 2×2,
$$\lambda_2 = y - 2x, \quad \lambda_1 = x - \lambda_2 = 3x - y.$$
Ainsi
$$(x,y) = (3x - y)u_1 + (y - 2x)u_2$$
puis
$$f(x,y) = (3x-y)f(u_1) + (y-2x)f(u_2) = (3x-y)2u_2 + (y-2x)(u_1 + 2u_2) = (y-2x)u_1 + 2xu_2,$$

3. <u>Rédaction par changement de bases</u> : Nous avons
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
<u>Rédaction directe</u> : Nous avons donc
$$f(1,0) = (-2 \times 1 + 0)u_1 + 2 \times 1u_2 = -2u_1 + 2u_2 = (-2,-4) + (2,6) = (0,2)$$

et

$$f(0,1) = u_1 = (1,2).$$

Par conséquent

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. On suppose qu'il existe un vecteur $u_3 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f(u_3) - u_3 = u_2 = (0,1,-1)$$

i.e.

$$(0, -z-y, y+z) = (0,1,-1)$$

i.e.

$$y+z = -1.$$

On considère le vecteur $u_3 = (0,-1,0) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$f(u_3) - u_3 = u_2.$$

2. La famille $\mathcal{B}_1$ est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(0,0,0) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_3).$$

Donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Par conséquent la famille $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donc il s'agit d'une base.

3. Comme la famille $\mathcal{B}_1$ est une base, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \lambda_1 u_1 + (-\lambda_2)(-u_2) + \lambda_3 u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2'(-u_2) + \lambda_3 u_2$$

avec $\lambda_2' = -\lambda_2$ entièrement déterminé par λ_2. Donc la famille $\mathcal{B}_2$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Rédaction directe : Nous avons

$$f(u_1) = (1,0,0) = u_1,$$
$$f(u_2) = (0,1,-1) = -(-u_2)$$

et, d'après la question 1,

$$f(u_3) = u_2 + u_3 = -(-u_2) + u_3.$$

Donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rédaction matricielle : On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, par formule de changement de bases,

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}),$$

avec, par calcul de l'inverse,

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}_2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \left(M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}^{-1})\right)^{-1} = (M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, après multiplications,

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} f(u) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(9e_1 - 5e_2 - 12e_3) + y(-6e_1 + 2e_2 + 6e_3) + z(10e_1 - 5e_2 - 13e_3) \\ &= (9x - 6y + 10z)e_1 + (-5x + 2y - 5z)e_2 + (-12x + 6y - 13z)e_3 \\ &= \Big(9x - 6y + 10z, -5x + 2y - 5z, -12x + 6y - 13z\Big). \end{aligned}$$

2. Méthode directe : Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_3, -2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3).$$

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_3$ et les autres équations deviennent $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. Par conséquent

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$.
Méthode matricielle : On calcule le déterminant de la matrice

$$\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on conclut qu'il est non nul. Par conséquent la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Méthode directe : Nous avons, d'après la question 1,

$$f(u_1) = f(2, -1, -2) = (4, -2, -4) = 2u_1,$$

$$f(u_2) = f(1, 0, -1) = (-1, 0, 1) = -u_2$$

et

$$f(u_3) = f(-2, 1, 3) = (6, -3, -9) = -3u_3.$$

Donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Méthode matricielle : Nous avons par formule de changement de bases et après calculs

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) &= \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) <u>Méthode directe</u> : Nous avons d'après la question précédente

$$u_1 = f\left(\frac{1}{2}u_1\right), u_2 = f(-u_2), u_3 = f\left(-\frac{1}{3}u_3\right) \in \mathrm{Im}(f).$$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre (d'après la question 2) de trois vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ de dimension au plus 3. Donc il s'agit d'une base de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, d'après la question 2, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Donc f est surjective puis bijective par égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée.
<u>Méthode matricielle</u> : Nous avons $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ inversible car de déterminant $2 \times (-1) \times 3 \neq 0$. Donc f est un isomorphisme. En particulier $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et en particulier, d'après la question 2, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4.

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. <u>Méthode directe</u> : On peut montrer que $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs.
<u>Méthode matricielle</u> : On peut montrer que la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et en déduire que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. <u>Méthode directe</u> : Nous avons

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3 = (1, 2, 2) = u_1 + u_2,$$

$$f(e_2) = 2e_1 + e_2 + 2e_3 = (2, 1, 2) = u_1 + u_2 + u_3$$

et

$$f(e_3) = -2e_1 - 2e_2 - 3e_3 = (-2, -2, -3) = -u_1 - 2u_2 - u_3.$$

Donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Méthode matricielle</u> : Nous avons par formule de changement de bases

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. <u>Méthode directe</u> : On montre que la famille e' est une famille libre de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs. On montre également que la famille f' est une famille libre de $2 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs.
<u>Méthode matricielle</u> : On montre que les matrices

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_c(f'_1, f'_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sont inversibles où $\mathcal{C}, c$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$. Donc les familles e', f' sont des bases de $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.
2. <u>Méthode directe</u> : Nous avons

$$u(e'_1) = u(e_2) + u(e_3) = -f_1 + 2f_2 + f_1 - 3f_2 = -f_2 = -f'_1 + f'_2,$$

$$u(e'_2) = u(e_3) + u(e_1) = f_1 - 3f_2 + 2f_1 + 3f_2 = 3f_1 = 3f'_1 + 3f'_2$$

et

$$u(e'_3) = u(e_1) + u(e_2) = 2f_1 + 3f_2 - f_1 + 2f_2 = \underbrace{f_1 + f_2}_{=2f'_1} + 4\underbrace{f_2}_{=f'_1 - f'_2} = 3f'_1 - f'_2.$$

Donc

$$\mathcal{M}_{e',f'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Méthode matricielle</u> : Nous avons par formule de changement de bases

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{e',f'}(u) &= \mathcal{M}_{c,f'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\mathcal{M}_{\mathcal{C},c}(u)\mathcal{M}_{e',\mathcal{C}}(u) \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 6.

— Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ tels que $0_{\mathbb{R}^2} = \lambda x + \mu\phi(x)$. Alors, en appliquant ϕ, on obtient

$$0_{\mathbb{R}^2} = \lambda\phi(x) + \mu\phi^2(x) = \lambda\phi(x).$$

Or $\phi(x) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $\lambda = 0$. Ainsi la première équation devient $0_{\mathbb{R}^2} = \mu\phi(x)$ et donc, pour la même raison, $\mu = 0$. Par conséquent $e := (x, \phi(x))$ est une famille libre de $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ vecteurs, donc il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^2$.

— Nous avons $\phi(x) = 0 \times x + 1 \times \phi(x)$ et $\phi(\phi(x)) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Donc

$$\mathcal{M}_{e,e}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$