Algèbre linéaire 2 - TD5 - Correction

D Cacitti-Holland

2024-2025

Exercice 1.

1. Nous avons $f = f \circ \mathrm{id}_E$. Donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ \mathrm{id}_E) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)P.$$

2. Nous avons de même $f = \mathrm{id}_E \circ f \circ \mathrm{id}_E$. Donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E)\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)P.$$

Exercice 2.

1. Nous avons

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons d'après la formule de changement de base

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\phi) = P^{-1}AP$$

avec

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\mathrm{Com}(P)^T = \frac{1}{-5-9}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, après produits matriciels

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\phi(f_1) = f_1 = (1, 0, -3)$, $\phi(f_2) = f_2 = (0, 1, 2)$ et $\phi(f_3) = -f_3 = (3, -2, 1)$. Ainsi ϕ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(f_3)$.

Exercice 3.

1. Nous avons

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Donc la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et, en notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$,

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons

$$f(u_1) = f(-2, 3) = (-2, 3) = u_1, \quad f(u_2) = f(-2, 5) = \left(-4 + \frac{10}{3}, 5 - \frac{10}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}u_2.$$

3. Nous avons par formule de changement de bases

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\right)^n \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5\end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -\frac{2}{3^n} \\ 3 & \frac{5}{3^n}\end{pmatrix}\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\frac{2}{3^n} \\ 3 & \frac{5}{3^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10-\frac{2}{3^{n-1}} & 4-\frac{4}{3^n} \\ -15+\frac{5}{3^{n-1}} & -6+\frac{10}{3^n}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Nous avons par récurrence

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n\end{pmatrix} &= A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10-\frac{2}{3^{n-1}} & 4-\frac{4}{3^n} \\ -15+\frac{5}{3^{n-1}} & -6+\frac{10}{3^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0\end{pmatrix}. \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \left(10-\frac{2}{3^{n-1}}\right)x_0+\left(4-\frac{4}{3^n}\right)y_0 \\ \left(-15+\frac{5}{3^{n-1}}\right)x_0+\left(-6+\frac{10}{3^n}\right)y_0\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10-\frac{2}{3^{n-1}} \\ -15+\frac{5}{3^{n-1}}\end{pmatrix}x_0+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4-\frac{4}{3^n} \\ -6+\frac{10}{3^n}\end{pmatrix}y_0.
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des suites qui vérifient le système de l'énoncé est le sous-espace de $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ engendré par les suites

$$\left(\begin{matrix} 10-\frac{2}{3^{n-1}} \\ -15+\frac{5}{3^{n-1}}\end{matrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\begin{matrix} 4-\frac{4}{3^n} \\ -6+\frac{10}{3^n}\end{matrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 4.

1. L'application ϕ ne peut pas être injective car $\dim(\mathbb{R}^3)=3>2=\dim(\mathbb{R}^2)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\ker(\phi) \\
=\ &\{x\in\mathbb{R}^3, \quad \phi(x)=0_{\mathbb{R}^2}\} \\
=\ &\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \quad \lambda_1\phi(e_1)+\lambda_2\phi(e_2)+\lambda_3\phi(e_3)=0_{\mathbb{R}^2}\} \\
=\ &\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \quad \lambda_1(2f_1+3f_2)+\lambda_2(-f_1+2f_2)+\lambda_3(f_1-3f_2)=0_{\mathbb{R}^2}\} \\
=\ &\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \quad (2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)f_1+(3\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3)f_2=0_{\mathbb{R}^2}\} \\
=\ &\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \quad 2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0, 3\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3=0\} \\
\underset{L_2\leftarrow L_2+3L_1}{=}\ &\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \quad 2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0, 9\lambda_1-\lambda_2=0\} \\
=\ &\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \quad \lambda_3=\lambda_2-2\lambda_1, \lambda_2=9\lambda_1\} \\
=\ &\{\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \quad \lambda_3=7\lambda_1, \lambda_2=9\lambda_1\} \\
=\ &\{\lambda(e_1+9e_2+7e_3), \quad \lambda\in\mathbb{R}\} \\
=\ &\mathrm{Vect}(e_1+9e_2+7e_3).
\end{aligned}$$

2. (a) Nous avons, en développant selon la première ligne par exemple,

$$\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e_1',e_2',e_3')\right)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-(-1)+1=2\neq 0.$$

Donc la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Nous avons d'après la formule de changement de bases

$$A_1=\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(\phi)=\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi)\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Nous avons d'après la formule de changement de bases

$$A_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\phi) = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}} = (\mathcal{M}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1}))^{-1}A_1 = (\mathcal{M}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}))^{-1}A_1.$$

Donc

$$A_2 = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f)$: il existe (x, y, z) tel que $(a, b, c) = f(x, y, z)$. Ainsi

$$\begin{aligned} (a,b,c) &= f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ &= x(e_1 - 3e_2 - 2e_3) + y(e_1 - 3e_2 - 2e_3) + z(-e_1 + 3e_2 + 2e_3) \\ &= (x + y - z)e_1 + (-3x - 3y + 3z)e_2 + (-2x - 2y + 2z)e_3 \\ &= (x + y - z)(e_1 - 3e_2 - 2e_3). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(e_1 - 3e_2 - 2e_3) = \mathrm{Vect}(1, -3, -2)$. Réciproquement

$$(1, -3, -2) = f(1, 0, 0) \in \mathrm{Im}(f).$$

Donc $\mathrm{Vect}(1, -3, -2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Par conséquent

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, -3, -2).$$

En particulier $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

2. Nous avons d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.$$

De plus $(1, -1, 0), (0, 1, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\ker(f)$, donc forment une base de $\ker(f)$.

3. Nous avons

$$f(1, -3, -2) = (0, 0, 0).$$

Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, -3, -2) \subset \ker(f).$$

Autrement dit nous avons également

$$(1, -3, -2) = (1, -1, 0) - 2(0, 1, 1) \in \mathrm{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, 1)) = \ker(f).$$

4. Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, nous avons $f(u) \in \mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, d'où $f(f(u)) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Par conséquent $f^2 = 0_{L(\mathbb{R}^3)}$. Donc

$$M^2 = (\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^2) = 0_{n,n}.$$

Puis par récurrence on en déduit que $M^n = 0_{n,n}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 6.

1.
   - On cherche $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u_1) = u_1$ i.e.

$$\begin{cases} -x_1 + 2y_1 - z_1 = 0 \\ 3x_1 - 3y_1 = 0 \\ -2x_1 + 2y_1 = 0 \end{cases}$$

   i.e.

$$x_1 = y_1 = z_1.$$

   Par exemple le vecteur $u_1 = (1, 1, 1)$ convient.

- On cherche $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u_2) = 2u_2$ i.e.

  $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x_2 & + & 2y_2 & - & z_2 & = & 0 \\ 3x_2 & - & 4y_2 & & & = & 0 \\ -2x_2 & + & 2y_2 & - & z_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

  i.e.

  $$3x_2 = 4y_2, \quad z_2 = -2x_2 + 2y_2.$$

  Par exemple le vecteur $u_2 = (4, 3, -2)$ convient.
- On cherche $u_3 = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u_3) = -4u_3$ i.e.

  $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x_3 & + & 2y_3 & - & z_3 & = & 0 \\ 3x_3 & + & 2y_3 & & & = & 0 \\ -2x_3 & + & 2y_3 & + & 5z_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

  i.e.

  $$3x_3 = -2y_3, \quad z_3 = 4x_3 + 2y_3.$$

  Par exemple le vecteur $u_2 = (2, -3, 2)$ convient.

2. Nous avons, par règle de Sarrus,

$$\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 4 - 12 - 6 - 6 - 8 = -30 \neq 0.$$

Donc la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Nous avons directement par construction des vecteurs u_1, u_2, u_3

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = D.$$

4. Nous avons donc M et D semblables par formule de changement de bases

$$M = PDP^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix} = ...$$