Algèbre linéaire 2 - TD6 - Correction

D Cacitti-Holland

2024-2025

Attention à la numérotation des exercices qui diffère un peu du TD.

Exercice 1.

$$\Delta_1 = -1+0+0-(-1)-0-2 = -2,$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 4\times(-2)\times(-5)+3\times(-7)\times 5+(-3)\times 8-(-2)\times 5-3\times(-3)\times(-5)-4\times(-7)\times 8\\ &= 40-105-24+10-45+224 = 100,\end{aligned}$$

$$\Delta_3 = 0$$

car $L_3 = 2L_2 - L_1$ par exemple. Pour Δ_4 on développe par rapport à la denière ligne (là où il y a plus de zéros)

$$\Delta_4 = d\begin{vmatrix} a & 3 & 0\\ 0 & b & 0\\ 1 & 2 & c\end{vmatrix}$$

puis par rapport à la second ligne

$$\Delta_4 = db\begin{vmatrix} a & 0\\ 1 & c\end{vmatrix} = dbac.$$

$$\begin{aligned}\Delta_5 &\underset{L_i\leftarrow L_i-L_1, i\neq 1}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a\\ 0 & b-a & b-a & b-a\\ 0 & b-a & c-a & c-a\\ 0 & b-a & c-a & d-a\end{vmatrix}\\ &\underset{L_3,L_4\leftarrow L_3-L_2, L_4-L_2}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a\\ 0 & b-a & b-a & b-a\\ 0 & 0 & c-b & c-b\\ 0 & 0 & c-b & d-b\end{vmatrix}\\ &\underset{L_4\rightarrow L_4-L_3}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a\\ 0 & b-a & b-a & b-a\\ 0 & 0 & c-b & c-b\\ 0 & 0 & 0 & d-c\end{vmatrix}\\ &= a(b-a)(c-b)(d-c),\end{aligned}$$

$$\Delta_6 \underset{L_i\leftarrow L_i-L_1, i\neq 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix} = -8,$$

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta_7 & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1}}{=} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 12 & -8 \\ 0 & -7 & 16 & -11 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\
& = & (-1)(-1)\begin{vmatrix} 5 & 12 & 8 \\ 7 & 16 & 11 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} \\
& \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} & \begin{vmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 7 & 16 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} & \begin{vmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_1}{=} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
& = & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\
& = & -3.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta_8 & \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1}}{=} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
& \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} & \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
& \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_2}}{=} & \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\
& = & -9.
\end{array}
$$

Exercice 2. Nous avons, en notant $d = d(x, a, b, c)$ le déterminant en question,

$$
\begin{array}{rcl}
d & \underset{C_i \leftarrow C_i - C_1, i \neq 1}{=} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & -x & -x \\ x & -x & b-x & -x \\ x & -x & -x & c-x \end{vmatrix} \\
& = & \begin{vmatrix} a-x & -x & -x \\ -x & b-x & -x \\ -x & -x & c-x \end{vmatrix} \\
& = & (a-x)(b-x)(c-x) - x^3 - x^3 - x^2(b-x) - x^2(c-x) - x^2(a-x) \\
& = & (a-x)(b-x)(c-x) + x^3 - (a+b+c)x^2 \\
& = & -(ab+bc+ca)x + abc.
\end{array}
$$

Donc, si $ab+bc+ca \neq 0$ alors $d=0$ si et seulement si $x = \dfrac{abc}{ab+bc+ca}$. Et si $ab+bc+ca=0$ alors $d=0$ si et seulement si $abc=0$ i.e. si et seulement si $a=0$ ou $b=0$ ou $c=0$.

Exercice 3. Les trois vecteurs e_1, e_2, e_3 de l'énoncé forment un base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &\neq \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \mu \\ \mu & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3, L_2 \leftarrow L_2 - \mu L_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 2 & \mu \\ 0 & -\mu & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\lambda + \mu^2 \end{aligned}$$

Donc si $\lambda \notin]0,2[$ alors $(\lambda-2)\lambda > 0$ et ainsi $(\lambda-2)\lambda+\mu^2 > 0$. Maintenant si $\lambda \in [0,2]$ et $\mu = \pm\sqrt{(2-\lambda)\lambda}$ alors $0 = (\lambda-2)\lambda+\mu^2$. Finalement si $\lambda \in [0,2]$ et $\mu \neq \pm\sqrt{(2-\lambda)\lambda}$ alors $0 \neq (\lambda-2)\lambda+\mu^2$. Par conséquent la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\lambda \notin]0,2[$ ou ($\lambda \in [0,2]$ et $\mu \neq \pm\sqrt{(2-\lambda)\lambda}$).

Exercice 4. Méthode par récurrence : On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $P(n)$:

$$\forall a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta(a,b) = 0$$

où l'on note $\Delta(a,b)$ le déterminant de l'énoncé.

- Pour $n=3$: Soient $a=(a_1,a_2,a_3), b=(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors, après règle de Sarrus, développements et simplifications,

$$\begin{aligned} \Delta(a,b) &= (a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3) + (a_2-b_1)(a_3-b_2)(a_1-b_3) + (a_3-b_1)(a_1-b_2)(a_2-b_3) \\ &\quad -(a_3-b_1)(a_2-b_2)(a_1-b_3) - (a_2-b_1)(a_1-b_2)(a_3-b_3) - (a_3-b_1)(a_1-b_2)(a_2-b_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- On suppose le résultat vrai au rang $n \geq 3$. Soient $a = (a_1, ..., a_{n+1}), b = (b_1, ..., b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors, en notant, pour tout $i \in \{1, ..., n+1\}$

$$\tilde{a}_i = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_{n+1}) \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{b}_1 = (b_2, ..., b_{n+1}) \in \mathbb{R}^n.$$

  Donc, en développant par rapport à la première colonne,

$$\Delta(a,b) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}(a_i - b_1)\Delta(\tilde{a}_i, \tilde{b}_1).$$

  Donc, grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée aux familles $\tilde{a}_i, \tilde{b}_1$, nous obtenons $\Delta(a,b) = 0$.

Par conséquent le théorème de récurrence permet de conclure.

Méthode par opérations sur les colonnes : Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta &\underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} b_2 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_2 - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix} \\ &\underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_n}{=} \begin{vmatrix} b_2 - b_1 & b_n - b_2 & a_1 - b_3 & \dots & a_1 - b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_2 - b_1 & b_n - b_2 & a_n - b_3 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix} \\ &= (b_2 - b_1)(b_n - b_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_1 - b_3 & \dots & a_1 - b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & a_n - b_3 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Méthode par multilinéarité par rapport aux colonnes : On note $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Alors, par linéarité par rapport à chacune des colonnes,

$$\begin{aligned}\Delta &= \det(A - b_1\mathbb{1}, ..., A - b_n\mathbb{1}) \\ &= \det(A, A - b_2\mathbb{1}, ..., A - b_n\mathbb{1}) - b_1 \det(\mathbb{1}, A - b_2\mathbb{1}, ..., A - b_n\mathbb{1}) \\ &= \det(A, A, A - b_3\mathbb{1}, ..., A - b_n\mathbb{1}) - b_2 \det(A, \mathbb{1}, A - b_3\mathbb{1}, ..., A - b_n\mathbb{1}) \\ &\quad -b_1 \det(\mathbb{1}, A, A - b_3\mathbb{1}, ..., A - b_n\mathbb{1}) + b_1 b_2 \underbrace{\det(\mathbb{1}, \mathbb{1}, A - b_3\mathbb{1}, ..., A - b_n\mathbb{1})}_{=0}.\end{aligned}$$

Ainsi en répétant ce raisonnement on obtient Δ égal à une combinaison linéaire de déterminant de la forme $\det(C_1, ..., C_n)$ avec $C_i \in \{A, \mathbb{1}\}$. Pour un tel déterminant s'il y a au moins deux colonnes égales à A alors le déterminant est nul, sinon il y a au plus une colonne égale à A et donc, comme $n \geq 3$, au moins deux colonnes égales à $\mathbb{1}$ et dans ce cas le déterminant est également nul. Par conséquent $\Delta = 0$.

Exercice 5. On considère un entier $n \geq 2$. Alors, par développement selon la première colonne,

$$\Delta_n = a_n x^n + \Delta_{n-1}.$$

Donc par itérations successives on en déduit que

$$\Delta_n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Exercice 6. Nous avons

$$(-1)^n = \det(-\mathrm{id}_E) = \det(f^2) = (\det(f))^2 \geq 0.$$

Donc n est pair.

Exercice 7.

1. Nous avons

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad a_{ii} = (-A^T)_{ii} = -a_{ii}.$$

Donc

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad a_{ii} = 0.$$

2. Nous avons

$$\det(A) = \det(-A^T) = \det((-I_n)A^T) = \det(-I_n)\det(A^T) = (-1)^n \det(A).$$

Donc si l'on suppose n impair alors $\det(A) = -\det(A)$ i.e. $\det(A) = 0$.