# Algèbre linéaire 2 - TD7 - Correction

D Cacitti-Holland

2024-2025

**Exercice 1.**

1. Nous avons
$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons
$$P_\phi = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 \\ 2 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)(3-X) - 8 = X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5).$$
Or les valeurs propres de $\phi$ sont exactement les racines de $P_\phi$, donc ses valeurs propres sont 1 et 5.

3. Pour $\lambda = -1$ : Soit $u = xf_1 + yf_2 \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$\begin{aligned} u \in \ker(\phi + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \quad &\iff \quad (A + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad x + 2y = 0. \end{aligned}$$
Ainsi
$$\ker(\phi + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{-2f_1 + f_2}_{=:e_1}).$$
Pour $\lambda = 5$ : Soit $u = xf_1 + yf_2 \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$\begin{aligned} u \in \ker(\phi - 5\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \quad &\iff \quad (A - 5I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad x - y = 0. \end{aligned}$$
Ainsi
$$\ker(\phi - 5\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{f_1 + f_2}_{=:e_2}).$$

4. On considère la matrice $P = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ avec $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$. Alors, d'après la formule de changement de bases,
$$P^{-1}AP = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
qui est bien une matrice diagonale.

**Exercice 2.**

1. On suppose par l'absurde que $\lambda = 0$. Alors, par définition d'une valeur propre, il existe $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $AX = 0$. Or $A$ est inversible, donc $X = A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0$ ce qui est absurde. Donc $\lambda \neq 0$.

2. Soit $X$ vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$. Alors $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Donc
$$A^{-1}X = A^{-1}\frac{1}{\lambda}\lambda X = \frac{1}{\lambda}A^{-1}AX = \frac{1}{\lambda}X.$$
Ainsi $X$ est un vecteur propre de $A^{-1}$ associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

**Exercice 3.**

1. Nous avons
$$P_A = \begin{vmatrix} \pi - X & 1 & 2 \\ 0 & \pi - X & 3 \\ 0 & 0 & \pi - X \end{vmatrix} = (\pi - X)^3.$$
Ainsi la seule racine de $P_A$ est $\pi$, donc la seule valeur propre de $A$ est $\pi$.

2. On suppose par l'absurde que $A$ est diagonalisable. Alors, comme $\pi$ est la seule valeur propre de $A$, il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que
$$A = P\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}P^{-1} = \pi P I_3 P^{-1} = \pi I_3$$
ce qui est absurde. Donc $A$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice 4.**

1. Nous avons
$$P_A = \begin{vmatrix} -5 - X & 3 \\ 6 & -2 - X \end{vmatrix} = (-5 - X)(-2 - X) - 18 = X^2 + 7X - 8 = (X - 1)(X + 8).$$
Donc les valeurs propres de $A$ sont les racines 1 et $-8$ de $P_A$.

2. <u>Pour $\lambda = 1$</u> : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - I_2) \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6x & + & 3y & = & 0 \\ 6x & - & 3y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad 2x = y. \end{aligned}$$
Donc
$$\ker(A - I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) =: \mathrm{Vect}(u_1).$$
<u>Pour $\lambda = -8$</u> : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A + 8I_2) \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 3y & = & 0 \\ 6x & + & 6y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad x = -y. \end{aligned}$$
Donc
$$\ker(A + 8I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =: \mathrm{Vect}(u_2).$$
<u>Diagonalisation</u> : On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, d'après la formule de changement de bases,
$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

3. On note $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = PCP^{-1}$. Alors
$$B^3 = PC^3P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1} = A.$$

**Exercice 5.**

1. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} P_f & = & P_A \\ & = & \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \\ & = & -X(-2-X)(1-X) - 6 - 2(-2-X) - 6(1-X) \\ & = & -X^3 - X^2 + 10X - 8 \\ & = & (1-X)(X^2+2X-8) \\ & = & (1-X)(X-2)(X+4). \end{array}$$

Donc les valeurs propres de $f$ sont les racines $1, 2$ et $-4$ de $P_f$.

2. Comme $f$ admet trois valeurs propres distinctes, $f$ est diagonalisable.
<u>Pour $\lambda = 1$</u> : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & & & = & 0 \\ -2x & + & 2y & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & x = y, y = z. \end{array}$$

Donc

$$\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1,1)}_{=:u_1}).$$

<u>Pour $\lambda = 2$</u> : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in \ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & & & = & 0 \\ -2x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & 3x = 4y, z = 2y - 2x. \end{array}$$

Donc

$$\ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(4,3,-2)}_{=:u_2}).$$

<u>Pour $\lambda = -4$</u> : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in \ker(f + 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & & & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & 3x = -2y, x = z. \end{array}$$

Donc

$$\ker(f + 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(2,-3,2)}_{=:u_3}).$$

<u>Conclusion</u> : Nous obtenons $(u_1, u_2, u_3)$ une base de vecteurs propres de $f$.

3. Nous avons par formule de changement de bases, en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec

$$P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à faire les deux produits matriciels.

4. On note $f' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A'$.

   (a) Polynôme caractéristique : Nous avons après calculs

   $$P_{A'} = (3-X)^2(5-X).$$

   (b) Valeurs propres : 3 et 5 sont les racines de $P_{A'}$ donc les valeurs propres de $A'$.

   (c) Pour $\lambda = 3$ : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

   $$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(f' - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff x+y-z=0. \end{aligned}$$

   Donc

   $$\ker(f' - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,-1,0),(1,0,1)}_{=:u_1,u_2}).$$

   Pour $\lambda = 5$ : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

   $$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(f' - 5\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff x=z, y=2x. \end{aligned}$$

   Donc

   $$\ker(f' - 5\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,2,1)}_{=:u_3}).$$

   (d) Diagonalisation Nous obtenons trois vecteurs propres distincts en dimension 3, donc $f$ est diagonalisable et, en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la formule de changement de bases donne

   $$A' = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

En particulier nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(A')^n = P\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

**Exercice 6.**

1. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ (uniques) tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Donc

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3) \\ &= \lambda_1(v_1+v_3) + \lambda_2(v_1+v_2) + \lambda_3(-v_1+v_3) \\ &= (\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)v_1 + \lambda_2 v_2 + (\lambda_1+\lambda_3)v_3. \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} P_f & = & P_M \\ & = & \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ & = & (1-X)^3 + 1 - X \\ & = & (1-X)((1-X)^2+1) \quad \text{(factorisation sur } \mathbb{R}) \\ & = & (1-X)(1+i-X)(1-i-X) \quad \text{(factorisation sur } \mathbb{C}). \end{array}$$

3. $P_f$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $f$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. $P_f$ est scindé à racines simples $\mathbb{C}$ donc $f$ est diagonalisable dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$.

**Exercice 7.**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $f$. Alors il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Or il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc

$$0 = f^k(x) = f^{k-1}(f(x)) = \lambda f^{k-1}(x) = \lambda f^{k-2}(f(x)) = \lambda^2 f^{k-2}(x) = ... = \lambda^k x.$$

Donc $\lambda^k = 0$ car $x \neq 0_E$. Ainsi $\lambda = 0$.

2. On suppose que $f$ est diagonalisable. Alors il existe une base de vecteurs propres $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de $E$ associées à la valeur propre 0. Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = 0_{n,n}$. Ainsi $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

**Exercice 8.**

- Nous avons premièrement

$$A_0 = P_f(0) = \det(f - 0\mathrm{id}_E) = \det(f).$$

- On se place sur $\mathbb{C}$ où $P_f$ est scindé :

$$P_f = (\lambda_1 - X)...(\lambda_n - X).$$

Ainsi le cœfficient devant $X^{n-1}$ dans $P_f$ est $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^n \lambda_k$. De plus, sur $\mathbb{C}$, $f$ est trigonalisable (voir chapitre suivant) avec $\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. Donc

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(f).$$

- Si $n = 2$ alors la formule se résume à

$$P_f = X^2 - \mathrm{tr}(f)X + \det(f).$$

Donc, d'un point de vue matriciel, pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$P_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A).$$

**Exercice 9.**

1. Nous avons, en notant $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ & = & \mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4). \end{array}$$

Donc $\mathrm{rg}(f) = 1$. Par théorème du rang nous en déduisons que

$$\dim(\ker(f)) = 4 - 1 = 3.$$

2. Nous savons déjà que 0 est valeurs propres de $f$ avec multiplicité 3 et, en notant $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$,

$$f(u) = f(e_1) + 2f(e_2) + 3f(e_3) + 4f(e_4) = u + 2u + 3u + 4u = 10u.$$

Donc 10 est valeur propre de $f$. Il n'y en a pas d'autres car nous avons obtenu $3 + 1 = 4$ comme somme des multiplicités.

3. On considère un endomorphisme $f$ de rang 1. Alors $\dim(\ker(f)) = n - 1$ par théorème du rang. On considère une base $(u_1, ..., u_{n-1})$ de $\ker(f)$. On complète cette famille en une base $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_{n-1}, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Ainsi

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-1,n-1} & * \\ 0_{1,n-1} & \lambda \end{pmatrix}.$$

En particulier, en appliquant la trace, on obtient $\lambda = \mathrm{tr}(f)$ :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-1,n-1} & * \\ 0_{1,n-1} & \mathrm{tr}(f) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P_f = (-X)^{n-1}(\mathrm{tr}(f) - X).$$

Si $\mathrm{tr}(f) = 0$ alors la multiplicité de $\mathrm{tr}(f)$ en tant que racine de $P_f$ est $n$ mais sa multiplicité en tant que valeur propre de $f$ est $n - 1$, donc $f$ n'est pas diagonalisable.
Si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$ alors les multiplicités des valeurs propres de $f$ vérifient $n - 1 + 1 = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc $f$ est diagonalisable.
En conclusion nous avons $f$ diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.