Théorèmes de Cauchy-Lispchitz globalement lipschitzien et linéaire

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Equations différentielles de Florent Berthelin

Leçons.

1. 220 Equations différentielles ordinaires, exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2
2. 221 Equations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires, exemples et applications

Lemme. Soit $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in K^N, (\alpha, \beta) \in [0, +\infty[^2 \backslash \{(0,0)\}, r_0 \in]0, +\infty], I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$ et $f : I \times \overline{B}(y_0, r_0) \longrightarrow K^N$ continue selon toutes les variables et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps.
Soit $E = C(I, \overline{B}(y_0, r_0))$ et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & (K^N)^I \\ y & \longmapsto & \left[\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K^N \\ t & \longmapsto & y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds \end{array} \right] \end{array}$$

On suppose $\forall y \in E, \phi(y) \in E$, alors il existe une unique solution globale $y : I \longrightarrow K^N$ de $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Démonstration.
Comme f est globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps, et I compact, il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (t, y_1, y_2) \in I \times \overline{B}(y_0, r_0)^2, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$

On munit E de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
Soit $(y, \tilde{y}) \in E^2$, alors par hypothèse

$$\forall p \in \mathbb{N}, (\phi^p(y), \phi^p(\tilde{y})) \in E^2$$

Donc

$$\forall t \in I, \|\phi^p(y)(t) - \phi^p(\tilde{y})(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

En effet raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$:

— Pour $p = 0$ on a

$$\forall t \in I, \left\|\phi^0(y)(t) - \phi^0(\tilde{y})(t)\right\| = \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

— On suppose le résultat vrai au rang $p \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{array}{rcl}\forall t \in I, t \geq t_0, \|\phi^{p+1}(y)(t) - \phi^{p+1}(\tilde{y})(t)\| & \leq & \int_{t_0}^t \|f(s, \phi^p(y)(s)) - f(s, \phi^p(\tilde{y})(s))\| \, ds \\ & \leq & k \int_{t_0}^t \|\phi^p(y)(s) - \phi(\tilde{y})(s)\| \, ds \\ & \leq & k \int_{t_0}^t k^p \frac{(s-t_0)^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_\infty \, ds \\ & = & k^{p+1} \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} \|y - \tilde{y}\|_\infty \end{array}$$

Et idem pour tout $t \in I, t \leq t_0$.

On considère $\gamma = max(\alpha, \beta)$, ainsi

$$\forall t \in I, \|\phi^p(y)(t) - \phi^p(\tilde{y})(t)\| \leq k^p \frac{\gamma^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

D'où

$$\|\phi^p(y) - \phi^p(\tilde{y})\|_\infty \leq k^p \frac{\gamma^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

Or $k^p \frac{\gamma^p}{p!} = \frac{(k\gamma)^p}{p!} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k^{p_0} \frac{\gamma^{p_0}}{p_0!} < 1$.
Ainsi ϕ^{p_0} est une contraction sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
Donc, d'après le théorème de point fixe itéré dans E complet, il existe un unique $y \in E$ tel que

$$\forall t \in I, y(t) = \phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Autrement dit y est l'unique solution de $y' = f(t, y)$ sur I telle que $y(t_0) = y_0$. □

Théorème. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point, $f : I \times K^N \longrightarrow K^N$ globalement lipschizienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps, et $(t_0, y_0) \in I \times K^N$, alors il existe une unique solution globale $y : I \longrightarrow K^N$ de $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Démonstration.
Etape 1 : Cas où $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$
Soit $y \in E$, alors par théorème fondamental de l'analyse $\phi(y) \in E$.
Donc le lemme précédent, appliqué avec $r_0 = +\infty$, permet de conclure.
Etape 2 : Unicité dans le cas I quelconque
Soit $y, \tilde{y} : I \longrightarrow K^{\mathbb{N}}$ deux solutions de $y' = f(t, y)$ tel que $y(t_0) = y_0 = \tilde{y}(t_0)$.
Soit $t \in I$, comme I non vide non réduit à un singleton, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \backslash \{(0, 0\}$ tel que

$$t \in J = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \subset I$$

Ainsi d'après l'étape précédente, $y(t) = \tilde{y}(t)$, d'où $y = \tilde{y}$ ce qui montre l'unicité de la solution.
Etape 3 : Existence dans le cas I quelconque
D'après la première étape, pour tout $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta] \subset I$, il existe une solution y_J de

l'équation sur J.
Or

$$\forall J_1, J_2 \subset I, \forall t \in J_1 \cap J_2, y_{J_1}(t) = y_{J_2}(t)$$

On peut donc considérer

$$y : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & K^{\mathbb{N}} \\ t & \longmapsto & y_J(t), t \in J \end{array}$$

Par conséquent y est solution de l'équation différentielle car en tout point elle coïncide avec une solution, de plus on a bien $y(t_0) = y_0$. $\square$

Corollaire. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, M_N(K))$, $B \in C(I, K^N)$ et $(t_0, y_0) \in I \times K^N$, alors il existe une unique solution $y : I \longrightarrow K^N$ de $y' = A(t)y + B(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Démonstration.
Soit J intervalle compact de I, alors

$$\forall t \in J, \forall (y_1, y_2) \in K^N, \|A(t)y + B(t) - A(t)\tilde{y} - B(t)\| = \|A(t)(y - \tilde{y})\| \leq \|A\|_{\underset{J}{\infty}} \|y - \tilde{y}\|$$

Or $\|A\|_{\underset{J}{\infty}} < +\infty$ par continuité de A sur le compact J.
Par conséquent le théorème précédent permet de conclure. $\square$