Différentielle de l'exponentielle matricielle

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi

Leçons.

1. 156 Exponentielles de matrices, applications
2. 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, exemples et applications

Théorème. L'application $exp : M_n(K) \longrightarrow GL_n(K)$ est différentiable en 0 et

$$dexp(0) = id_{M_n(K)}$$

De plus exp est différentiable sur $M_n(K)$ et

$$\forall A, H \in M_n(K), dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j \right)$$

Démonstration.

Etape 1 : Différentielle de exp en 0

Soit $H \in M_n(K)$, alors

$$exp(0+H) = exp(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}$$

Avec $I_n = exp(O)$ et $[H \longmapsto H] = id_{M_n(K)}$ linéaire sur $M_n(K)$.
De plus, pour une norme matricielle sur $M_n(K)$, on a

$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\left\| H^k \right\|}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = e^{\|H\|} - \|H\| - 1$$

Puis par développement limité de l'exponentielle réelle et en manipulant des o matriciels, on obtient que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \underset{\|H\| \to 0}{=} o(\|H\|)$$

Par conséquent exp est différentiable en 0 et

$$dexp(0) = id_{M_n(K)}$$

Etape 2 : Différentiabilité en tout point

Pour tout $A \in M_n(K)$, on a

$$exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

L'idée est d'étudier les fonctions sous le signe somme, on considère donc les fonctions de classe C^1, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\phi_k : \begin{array}{ccc} M_n(K) & \longmapsto & M_n(K) \\ A & \longmapsto & \frac{A^k}{k!} \end{array}, \varphi_k : \begin{array}{ccc} M_n(K) & \longmapsto & M_n(K) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$$

Soit $A \in M_n(K)$, calculons sa différentielle en A.
On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \varphi_k(A+H) \underset{\|H\| \to 0}{=} A^k + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$

— Pour $k = 1$ on a directement

$$\varphi_1(A+H) = A + H \underset{\|H\| \to 0}{=} A + H + o(\|H\|)$$

— On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall H \in M_n(K), (A+H)^{k+1} = (A+H)^k(A+H) = \varphi_k(A+H)(A+H)$$

Donc par hypothèse de récurrence

$$\begin{array}{rcl} (A+H)^{k+1} & \underset{\|H\| \to 0}{=} & \left(A^k + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|) \right) (A+H) \\ & = & A^{k+1} + A^k H + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^{j+1} + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\ & = & A^{k+1} + A^k H A^0 + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\ & = & A^{k+1} + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \end{array}$$

avec, comme $\mathbb{R}$ est un anneau commutatif,

$$\left\| \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \right\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \left\| A^i H A^j H \right\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\|^2 = \|H\|^2 k \|A\|^{k-1}$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \underset{\|H\|\to 0}{=} o(\|H\|)$$

Finalement on a bien

$$\mathcal{P}(k+1) : \varphi_{k+1}(A+H) \underset{\|H\|\to 0}{=} A^{k+1} + \sum_{\substack{0\le i,j\le k\\ i+j=k}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$

Ce qui achève la récurrence.
Par conséquent φ_k est différentiable de différentielle, pour $k \ge 1$, est A est donnée par

$$\forall H \in M_n(K), d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^i H A^j$$

Et, comme $\varphi_0 = I_n$ constante, $d\varphi_0(A) = 0$.
Ainsi

$$\forall H \in M_n(K), \|d\varphi_k(A)(H)\| \le \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} \left\|A^i H A^j\right\| \le \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\| = k \|A\|^{k-1} \|H\|$$

Donc $d\varphi_k(A)$ est continue (automatique car linéaire en dimension finie) et sa norme d'opérateur est

$$\|d\varphi_k(A)\| \le k \|A\|^{k-1}$$

Par conséquent ϕ est également différentiable en A et sa différentielle vérifie

$$\|d\phi_k(A)\| = \frac{\|d\varphi_k(A)\|}{k!} \le \frac{\|A\|^{k-1}}{(k-1)!}$$

Ainsi la série d'applications linéaires $\sum d\phi_k$ de $M_n(K)$ dans $L(M_n(K))$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(K)$, donc uniformément convergente sur tout compact de $M_n(K)$.
Or $L(M_n(K))$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc est de Banach.
Ainsi la fonction somme $exp = \sum \phi_k$ est de classe C^1 sur $M_n(K)$ et

$$\forall A \in M_n(K), \forall H \in M_n(K), dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^i H A^j \right)$$

$\square$