Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries réels de termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Comment se comportent les séries associées ? (le démontrer)
Que peut-on dire des restes et des sommes partielles associés ?

Exercice. Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}}, v_n = \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}, w_n = e^{-\sqrt{2+n}}, x_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \frac{S_0 + ... + S_n}{n}$$

1. Montrer que si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S alors $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro vers S.
2. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\sum u_n$ ne converge pas et que $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro (en calculant la limite des T_n associées).

Question de cours. Énoncer et démontrer le critère des séries alternées.

Exercice. Etablir la convergence puis calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3 - 4n}, n \geq 3$$

Exercice. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que R_n est bien défini.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Déterminer un équivalent de R_n.
4. Donner la nature de la série $\sum R_n$.

Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que si $\sum |u_n|$ est une série convergente alors $\sum u_n$ est une série convergente.

Exercice. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}, n \geq 2$$

Exercice. On considère l'application continue

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |sin(2\pi x)| \end{array}$$

1. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge.
2. Montrer que la fonction $F : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \int_0^y f(x)dx \end{array}$ vérifie $F(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Quelle hypothèse sur f manque-t-il pour appliquer le théorème de comparaison série-intégrale ?

Exercice. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. Montrer que $\sum v_n$ est une série convergente.
3. Montrer que $\sum u_n$ est une série divergente.
4. Pourquoi les réponses aux questions précédentes ne mettent pas en défaut le théorème concernant les séries dont les termes sont équivalents ?