

**Khôlleur : Dorian Cacitti-Holland**

**Elève :**

**Question de cours.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux séries réels de termes positifs telles que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ . Comment se comportent les séries associées ? (le démontrer)

Que peut-on dire des restes et des sommes partielles ?

**Réponse.** Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature. En cas de convergence on a équivalence des restes et en cas de divergence on a équivalence des sommes partielles.

*Démonstration.*

De même nature : Comme  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , on a  $u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ , donc pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

Ainsi si  $\sum u_n$  (respectivement  $\sum v_n$ ) converge alors  $\sum v_n$  (respectivement  $\sum u_n$ ) converge.  
En cas de convergence : Dans ce cas, on peut considérer les restes des séries et on a par sommation de l'inégalité précédente :

$$\forall n \geq N, (1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

ce qui établit l'équivalence des restes.

En cas de divergence : On note  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites des sommes partielles.

Alors

$$\forall n \geq N, S_n - S_N = \sum_{k=N+1}^n u_k, T_n - T_N = \sum_{k=N+1}^n v_k$$

Donc, par l'encadrement précédent,

$$\forall n \geq N, (1 - \varepsilon)(T_n - T_N) \leq S_n - S_N \leq (1 + \varepsilon)(T_n - T_N)$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall n \geq N, \left(1 - \varepsilon - \frac{(1 - \varepsilon)T_N - S_N}{T_n}\right) T_n \leq S_n \leq \left(1 + \varepsilon - \frac{(1 + \varepsilon)T_N - S_N}{T_n}\right) T_n$$

Or  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, donc  $S_n, T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , ainsi

$$\frac{(1 - \varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \frac{(1 + \varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi il existe  $N' \geq N$  tel que

$$\forall n \geq N', -\varepsilon \leq \frac{(1 - \varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \leq \varepsilon, -\varepsilon \frac{(1 + \varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \leq \varepsilon$$

D'où

$$\forall n \geq N', (1 - 2\varepsilon)T_n \leq S_n \leq (1 + 2\varepsilon)T_n$$

ce qui montre bien l'équivalence des sommes partielles. □

**Exercice.** Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{1 - \sin(n)}{1 + n\sqrt{n}}, v_n = \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}, w_n = e^{-\sqrt{2+n}}, x_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Réponse.** Les séries  $\sum u_n$ ,  $\sum w_n$  et  $\sum x_n$  sont convergentes et la série  $\sum v_n$  est divergente.

*Démonstration.*

Série  $\sum u_n$  : On a, par bornitude du sinus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{2}{1 + n\sqrt{n}}$$

De plus  $\frac{2}{1+n\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$  avec  $\sum \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$  convergente car  $\frac{3}{2} > 1$ .

Par conséquent, par théorème sur les séries à termes positifs  $\sum \frac{2}{1+n\sqrt{n}}$  est convergente.

Puis, par théorème de comparaison,  $\sum u_n$  est convergente.

Série  $\sum v_n$  : On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

avec  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  divergente car  $\frac{1}{2} < 1$ , donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum v_n$  est divergente.

Série  $w_n$  : On a  $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  par croissance comparée, avec  $\sum \frac{1}{n^2}$  convergente, donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum w_n$  est convergente.

Série  $x_n$  : On a

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}(1 + o(1))$$

Donc,  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ , puis, par théorème de comparaison,  $\sum x_n$  est convergente.  $\square$

**Exercice.** On dit qu'une série numérique  $\sum u_n$  converge au sens de Cesàro si, en notant  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de  $\sum u_n$ , la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n}$$

1. Montrer que si  $\sum u_n$  est une série convergente de somme  $S$  alors  $\sum u_n$  converge au sens de Cesàro vers  $S$ .
2. On considère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , montrer que  $\sum u_n$  ne converge pas et que  $\sum u_n$  converge au sens de Cesàro (en calculant la limite des  $T_n$  associés).

*Démonstration.*

1. On suppose que  $\sum u_n$  est une série convergente et on note  $S$  sa somme

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} S$$

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq N, |S_n - S| \leq \varepsilon$$

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |T_n - S| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k - S \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (S_k - S) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k - S|$$

Ainsi, pour  $n \geq N$ ,

$$|T_n - S| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |S_k - S| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |S_k - S| + \frac{n-N}{n} \varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |S_k - S| + \varepsilon$$

Or  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc il existe  $N' \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq N', \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^N |S_k - S|}$$

(on peut supposer  $\sum_{k=1}^N |S_k - S| \neq 0$  car sinon le résultat est immédiat.)

Ainsi, en posant  $N_0 = \max(N, N')$ , on a

$$\forall n \geq N_0, |T_n - S| \leq 2\varepsilon$$

D'où  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $S$ .

2. La suite  $(-1)^n$  ne converge pas vers 0 donc la série  $\sum (-1)^n$  n'est pas convergente. Par contre, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{\text{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

car  $\frac{n}{2} - 1 \leq \text{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) \leq \frac{n}{2}$  d'où  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{\text{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)}{n} \leq \frac{1}{2}$  et par théorème des gendarmes. □

**Khôlleur : Dorian Cacitti-Holland**

**Elève :**

**Question de cours.** Énoncer et démontrer le critère des séries alternées.

**Réponse.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$  décroissante telle que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors la série  $\sum (-1)^n a_n$  est convergente. De plus sa somme  $S$  et ses restes partielles  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, |R_n| \leq a_{n+1}$$

*Démonstration.* Comme  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes, donc convergentes vers la même limite.

Ainsi la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, ie la série  $\sum (-1)^n a_n$  est convergente.

De plus on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$$

et, en utilisant l'inégalité précédente en  $n + 1$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$$

Par conséquent  $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq a_{n+1}$ . □

**Exercice.** Etablir la convergence puis calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}, n \geq 3$$

**Réponse.** La série est convergente et  $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{89}{96}$ .

*Démonstration.*

Convergence : On a

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$$

Or le série  $\sum \frac{2}{n^2}$  est convergente, donc, par théorème de comparaison des séries de termes positifs équivalents, la série  $\sum u_n$  est convergente.

Calcul de la somme : On a

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)}$$

Puis par décomposition en éléments simples il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$$

Or  $\frac{2X-1}{X(X-2)(X+2)} = a + \frac{X}{X-2}b + \frac{X}{X+2}c$ , donc, en évaluant en 0, on obtient  $a = \frac{1}{4}$ .

De même on a  $b = \frac{3}{8}$  et  $c = -\frac{5}{8}$ .

Ainsi

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{3}{8} \frac{1}{n-2} + \frac{1}{4} \frac{1}{n} - \frac{5}{8} \frac{1}{n+2}$$

Donc, par réindexation,

$$\forall N \geq 3, \sum_{n=3}^N u_n = \sum_{n=3}^N \left( \frac{3}{8} \frac{1}{n-2} + \frac{1}{4} \frac{1}{n} - \frac{5}{8} \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{8} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n} + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} - \frac{5}{8} \sum_{n=5}^{N+2} \frac{1}{n}$$

Puis, après simplification,

$$\sum_{n=3}^N u_n \underset{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \frac{1}{2} + \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{3} + \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{4} + o(1)$$

D'où  $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{89}{96}$ .

□

**Exercice.** On considère, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .

1. Montrer que  $R_n$  est bien défini.
2. Montrer que  $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ .
3. Déterminer un équivalent de  $R_n$ .
4. Donner la nature de la série  $\sum R_n$ .

*Démonstration.*

1. D'après le critère des séries alternées, la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est convergente. De plus, en notant  $S$  la somme de cette série, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

3. D'après le critère des séries alternées appliqué à  $\sum \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

D'où

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

De plus, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , donc, en utilisant la question 2 :

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui montre que

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

4. Comme  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et que  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  sont des séries convergentes, on en déduit que la série  $\sum R_n$  est convergente.

□

**Khôlleur : Dorian Cacitti-Holland**

**Elève :**

**Question de cours.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , montrer que si  $\sum |u_n|$  est une série convergente alors  $\sum u_n$  est une série convergente.

*Démonstration.* On considère, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^+ = \max(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ . Alors les suites  $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  sont positives et vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ \leq |u_n|, u_n^- \leq |u_n|$$

Or  $\sum |u_n|$  est convergente, donc les séries  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  sont convergentes. Puis, comme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^-$ , on en déduit que  $\sum u_n$  est convergente.  $\square$

**Exercice.** Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$$

**Réponse.** La série est divergente.

*Démonstration.* La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [k, k+1]$ ,  $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ .

Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Puis, par relation de Chasles,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Or, par propriétés de  $\ln$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k) \leq \sum_{k=2}^n \ln(n) = (n-1)\ln(n)$$

Donc

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)(n-1)} \geq \frac{1}{n-1}$$

Or la série  $\sum \frac{1}{n-1}$  diverge, donc, par théorème de comparaison  $\sum u_n$  diverge.  $\square$

**Exercice.** On considère l'application continue

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |\sin(2\pi x)| \end{array}$$

1. Montrer que la série  $\sum f(n)$  converge.
2. Montrer que la fonction  $F : \begin{array}{l} [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \int_0^y f(x)dx \end{array}$  vérifie  $F(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ .
3. Quelle hypothèse sur  $f$  manque-t-il pour appliquer le théorème de comparaison série-intégrale ?

*Démonstration.*

1. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = |\sin(2\pi n)| = 0$ .  
Donc la série  $\sum f(n)$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = 0$ .
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ , alors, comme  $f$  est positive, en notant  $p = \text{Ent}(x)$ , on a

$$\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^p f(t)dt = \sum_{n=0}^{p-1} \int_n^{n+1} f(t)dt$$

Or  $f$  est 1-périodique, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-\sin(2\pi t))dt = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi

$$\int_0^x f(t)dt \geq \sum_{n=0}^{p-1} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}p \geq \frac{2}{\pi}(x-1)$$

D'où  $\int_0^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  ce qui montre, puisque  $f \geq 0$ , que  $f$  n'est pas intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

3. Il manque l'hypothèse de décroissance de la fonction  $f$  pour appliquer le théorème de comparaison série-intégrale.

□

**Exercice.** On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .
2. Montrer que  $\sum v_n$  est une série convergente.
3. Montrer que  $\sum u_n$  est une série divergente.



4. Pourquoi les réponses aux questions précédentes ne mettent pas en défaut le théorème concernant les séries dont les termes sont équivalents ?

*Démonstration.*

1. On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = v_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$  avec  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .
2. La série  $\sum v_n$  vérifie le critère des séries alternées, donc  $\sum v_n$  est convergente.
3. La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum v_n$  converge et la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, donc, par sommation la série  $\sum u_n$  diverge.
4. Tous les termes des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne sont pas positifs (ou négatifs).

□