Question de cours. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes. Que peut-on dire des suites convergentes, des applications continues et des applications lipschiziennes sur cet espace ?

Réponse. La convergence et la limite d'une suite ne dépendent de la norme considérée. De même pour le caractère continue ou lipschizien d'une application.

Exercice. Soit $E = c_0$ l'espace vectoriel des suites dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 en $+\infty$, muni de la norme uniforme $\|u\|_\infty = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}|u_n|$. On considère la forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \end{array}$$

Montrer que φ est continue et calculer $\|\varphi\| = \underset{u\in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|\varphi(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$.

Démonstration.

1. Soit $u \in E$, alors

$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\,\|u\|_\infty$$

   D'où φ est continue et $\|\varphi\| \leq 2$.
   De plus, pour $m \in \mathbb{N}$, on considère $u_m = (1, ..., 1, 0, ...)$ (dont les m premiers termes sont des 1).
   Ainsi

$$|\varphi(u_m)| = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n}, \|u_m\|_\infty = 1$$

   D'où

$$\|\varphi\| \geq \|u_m\|_\infty$$

   Ainsi en faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient $\|\varphi\| \geq 2$, d'où

$$\|\varphi\| = 2$$

□

Exercice. Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivables sur $[0,1]$. On pose, pour $f \in E$,

$$\|f\| = \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

3. On considère $f_n(t) = t^n(1-t)$. Calculer $\|f_n\|$ et en déduire que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Démonstration.

1. On peut remarquer que $\|\cdot\|$ est issue du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par
$$\forall f, g \in E, \langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$
qui est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive. Seule la propriété définie est non triviale : Soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$, alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$, ainsi $f = 0$.
2. On suppose qu'il existe $f \in E$ tel que
$$\|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
ie
$$|f_n(0) - f(0)|^2 + \int_0^1 |f_n'(t) - f'(t)|^2 dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
D'où
$$|f_n(0) - f(0)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \int_0^1 |f_n'(t) - f'(t)|^2 dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Or par inégalité de Cauchy-Schwarz on a
$$\int_0^1 |f_n'(t) - f(t)|dt = \langle 1, |f_n' - f'|\rangle \leq \left(\int_0^1 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f_n'(t) - f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Puis par théorème fondamental de l'analyse
$$\forall x \in [0,1], |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^x |f_n'(t) - f(t)|dt \leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt$$
D'où
$$\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
3. On a
$$\|f_n\|^2 = |f_n(0)|^2 + \int_0^1 |f_n'(t)|^2 dt = 0 + \int_0^1 \left(nt^{n-1}(1-t) - t^n\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt$$
avec $\left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 = t^{2n-2}n^2 - 2t^{2n-1}n(n+1) + t^{2n}(n+1)^2$ puis
$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = n^2 \int_0^1 t^{2n-2}dt - 2n(n+1)\int_0^1 t^{2n-1}dt + (n+1)^2 \int_0^1 t^{2n}dt$$
ie
$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n^2}{2n-1} - \frac{2n(n+1)}{2n} + \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

ie

$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n^2}{2n-1} - (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

ie

$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n^2(2n+1) - (n+1)(2n-1)(2n+1) + (2n-1)(n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

ie

$$\int_0^1 \left(t^{n-1}n - t^n(n+1)\right)^2 dt = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{4n^2-1}$$

ce qui donne

$$\|f_n\| = \sqrt{\frac{n}{4n^2-1}}$$

Par conséquent

$$\|f_n\| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et d'autre part on a

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

Donc les normes ne peuvent pas être équivalentes.

$\square$

Question de cours. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Montrer que f est lipschizienne pour tout norme sur E.

Réponse. Soit b une base de E et $\|\cdot\|_b$ la norme infinie associée. Alors pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in E$, on a

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(b_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(b_i)\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i)\|_F \right) \|x\|_b$$

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $\|P\|_\infty := \underset{k\in\mathbb{N}}{max} |a_k|$ et $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k+1}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ ne sont pas comparables (ie qu'il n'existe pas de $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $C_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_\infty \leq C_2 \|\cdot\|$).

Démonstration.

1. Les sommes sont en fait finies car il s'agit de polynômes, les axiomes d'une norme s'en déduisent.
2. On considère $P_n = X^n$ et $Q^n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Alors

$$\|P_n\|_\infty = \|Q_n\|_\infty = 1$$

et

$$\|P_n\| = \frac{1}{n+1}, \|Q_n\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

On en déduit que les normes ne sont pas comparables.

□

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

1. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que le résultat précédent est faux dans $\mathbb{Q}^N$.

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}^n$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi

$$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \|u_m - l\| + \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Réciproquement on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n \geq N \Rightarrow \forall m \geq N, \|u_m - u_n\| \leq 1$$
   Donc
   $$n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \|u_N\| + \|u_N - u_n\| \leq \|u_N\| + 1$$
   Par conséquent
   $$\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, ..., \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$$
   Donc, d'après le théorème de Bolzanno-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que
   $$u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}} l$$
   Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall m, n \geq N, \|u_m - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   Par conséquent, comme φ est croissante,
   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \left\|u_n - u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \varepsilon$$
   ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$.
3. Le résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{Q}$ car par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car convergente dans $\mathbb{R}$ vers e mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

□

Exercice. Soit E et F deux espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.
On dit que $u \in F^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$
On suppose que F est complet (toute de suite de Cauchy dans F est convergeante).
Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est également complet pour la norme $\|\cdot\|$ définie par
$$\forall T \in \mathcal{L}(E,F), \|T\| = \underset{x\in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Démonstration. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |T_m(x) - T_n(x)| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$
D'où, comme F est complet, il existe $T(x) \in F$ tel que
$$\|T_n(x) - T(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi l'application T ainsi construite est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, alors par inégalité triangulaire et linéarité des T_n

$$\|T(\lambda x + y) - (\lambda T(x) + T(y))\| \leq \|T_n(\lambda x + y) - T(\lambda x + y)\| + |\lambda| \|T_n(x) - T(x)\| + \|T_n(y) - T(y)\|$$

D'où en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$.
De plus T est continue car

$$\forall x \in E, \|T(x)\| = \underset{n \to +\infty}{lim} \|T_n(x)\|$$

Avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\|$$

D'où

$$\|T(x)\| \leq \left(\underset{n \in \mathbb{N}}{sup} \|T_n\| \right) \|x\|$$

avec $\underset{n \in \mathbb{N}}{sup} \|T_n\| < +\infty$ car une suite de Cauchy est bornée.
Par conséquent $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
De plus pour tout $x \in E$ on a

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| \leq \underset{k \in \mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_n\| \|x\|$$

D'où en faisant tendre m vers $+\infty$ on obient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T(x) - T_n(x)\| \leq \underset{k \in \mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_k\| \|x\|$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T - T_n\| \leq \underset{k \in \mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_n\|$$

Or par condition de Cauchy sur $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\underset{k \in \mathbb{N}}{sup} \|T_k - T_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où

$$\|T - T_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui montre que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$. $\square$

Question de cours. Montrer que les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $C([0,1],\mathbb{R})$.

Réponse. On a $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ mais nous n'avons pas d'inégalité dans l'autre sens : On considère f_n fonction triangle sur $[0,1]$ de maximum n et d'intégrale 1, puis $g_n = \sqrt{f_n}$ de maximum $\sqrt{n}$ et $\|g_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(x)dx = 1$, d'où $\|g_n\|_\infty = \sqrt{n}$ non borné alors que $\|g_n\|_2 = 1$ l'est.

Exercice. On considère $E = C_b(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire $T : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = 3f(x) - 2f(x+4)$$

Montrer que T est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer $\|T\| = \underset{f\in E\setminus\{0\}}{sup} \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

Démonstration. Soit $f \in E$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, |T(f)(x)| \leq 3|f(x)| + 2|f(x+4)| \leq 5\|f\|_\infty$$

D'où

$$\|T(f)\|_\infty \leq 5\|f\|_\infty$$

Ainsi, d'après ce qui précède, $\|T\| \leq 5$.
On considère ensuite $f \in E$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq 0 \\ -\frac{x}{2} + 1 & si \quad 0 < x < 4 \\ -1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Ainsi f est continue, $\|f\|_\infty = 1$ et

$$T(f)(0) = 3f(0) - 2f(4) = 5$$

D'où $\|T(f)\|_\infty \geq 5$, ainsi, d'après ce qui précède, $\|T(f)\|_\infty = 5$ et

$$\|T\| = 5$$

□

Exercice. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. On considère $u : f \in E \longmapsto f(0) \in \mathbb{R}$ et

$$\psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f - u(f)id_{\mathbb{R}} \end{array}$$

Montrer que ψ est :

1. Linéaire.
2. Bijective.
3. Non continue sur E muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Démonstration.

1. L'application u est linéaire donc ψ également.
2. Soit $f \in E$ tel que $\psi(f) = 0$, alors $f = u(f)id_{\mathbb{R}}$, ainsi $u(f) = f(0) = f(0) \times 0 = 0$, puis $f = 0 \times id_{\mathbb{R}} = 0$ ce qui montre que f est injective.
   Soit $f \in E$, alors
   $$\psi(f + u(f)id_{\mathbb{R}}) = f + u(f)id_{\mathbb{R}} - u(f + u(f)id_{\mathbb{R}})id_{\mathbb{R}} = f - u(f)u(id_{\mathbb{R}}) = f - 0 = f$$
   D'où ψ est surjective.
3. On suppose que ψ est continue sur E.
   Alors $\varphi = u(id_E)id_{\mathbb{R}} = id_E - \psi$ est continue sur E comme somme d'applications continues.
   De plus ψ est linéaire, donc ψ est k-lipschizienne :
   $$\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_1 \leq k \|f\|_1$$
   Or
   $$\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_1 = \int_0^1 |\varphi(f)(x)|dx = \int_0^1 |f(0)x|dx = \frac{|f(0)|}{2}$$
   Donc
   $$\forall f \in E, |f(0)| \leq 2k \|f\|_1$$
   ce qui n'est pas possible en considérant $f_n \in E$ triangulaire positive tel que $f_n(0) = n$ et $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$.

$\square$

Exercice. Soit $E = C([a,b], \mathbb{K})$ muni des normes $\|\cdot\|_p$ $(p \geq 1)$ définies par

$$\forall f \in E, \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Montrer que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(2\delta)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

En déduire $\underset{p \to +\infty}{lim} \|f\|_p$ pour $f \in E$.

Démonstration. Si $f = 0$ alors $\|f\|_p = 0 \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puis si f non identiquement nulle alors

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

Comme f est continue sur $[a,b]$ compact, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors par continuité en x_0, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [a,b], |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_0)| - |f(x)| = |f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^p dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (|f(x_0)| - \varepsilon)^p dx \geq 2\delta \left(\|f\|_\infty - \varepsilon\right)^p$$

Par conséquent

$$(2\delta)^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_\infty - \varepsilon\right) \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

D'où en faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient

$$\|f\|_\infty \leq \underset{p\to+\infty}{lim} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Ainsi $\underset{p\to+\infty}{lim} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. $\square$