Question de cours. Soit E un espace vectoriel, $u \in L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_{|F}} \mid \pi_u$.

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, A et B deux polynômes à coefficients dans K, $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. Montrer que $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. Montrer que $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.
4. Montrer que $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer le lemme des noyaux.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
On suppose que u est nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, montrer que la famille $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre
2. Montrer que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est stable par u, puis écrire la matrice de l'endomorphisme induit par la restriction dans la base $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \simeq End(\mathbb{C}^n)$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que les vecteurs propres communs à A et B sont dans $ker(C)$.
2. On suppose que $ker(C) = \{0\}$, montrer que C est inversible et calculer la trace de $ABC^{-1} - BA^{-1}$. En déduire que $ker(C) \neq \{0\}$
3. Montrer que $ker(C)$ est stable par A et B.
4. On note A' (respectivment B') l'endomorphisme induit par la restriction de A (respectivement B) à $ker(C)$. Montrer que A' et B' admettent un vecteur propre commun.
5. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
6. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables, ie qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que les matrices PAP^{-1}, PBP^{-1} et PCP^{-1} soient triangulaires supérieures.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in L(E)$, montrer que si u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice. On considère E le sous-espace vectoriel des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

   Déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(u_i)_{i \in I} \in (L(E))^I$ diagonalisbles. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les u_i commutent deux à deux.
2. Il existe une base commune de diagonalisation dans E pour les u_i.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche