Question de cours. Soit E un espace vectoriel, $u \in L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_{|F}} \mid \pi_u$.

Démonstration. Soit $(e_1, ..., e_k)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1, ..., e_n)$ de E.
Alors, comme F est u-stable, en notant $B = Mat_{(e_1,...,e_k)}(u_{|F})$ et $A = Mat_{(e_1,...,e_n)}(u)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ (0) & * \end{pmatrix}$$

D'où

$$\chi_u = det(XI_n - A) = det\begin{pmatrix} XI_k - B & * \\ (0) & ** \end{pmatrix} = det(XI_k - B)Q = \chi' Q$$

avec $Q \in K[X]$.
Ainsi $\chi' \mid \chi_u$.
Puis $\pi_{u_{|F}} \mid \pi_u$ car pour tout $x \in F$,

$$\pi_u(u_{|F})(x) = \pi_u(u(x)) = 0$$

□

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 &= 2 \\ v_0 &= 1 \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Démonstration. Le système précédent se réécrit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n, X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Or $\chi_A = (X-2)(X-3)$, donc le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
De plus $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.
Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X_0$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n &= 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n &= -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{cases}$$

□

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, A et B deux polynômes à coefficients dans K, $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. Montrer que $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. Montrer que $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.
4. Montrer que $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'il existe $A', B' \in K[X]$ tels que $A = DA'$ et $B = DB'$ avec A' et B' premiers entre eux.
Or $MD = AB = D^2A'B'$, ainsi $M = DA'B'$.
Puis par relation de Bézout sur A' et B', il existe $P, Q \in K[X]$ tels que

$$1 = A'P + B'Q$$

1. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $ker(D(f)) \subset ker(A(f))$.
   De même $ker(D(f)) \subset ker(B(f))$, d'où $ker(D(f)) \subset ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
   Réciproquement soit $x \in ker(A(f)) \cap ker(B(f))$, alors

   $$D(f)(x) = P(f) \circ A(f)(x) + Q(f) \circ B(f)(x) = 0$$

   Donc $x \in ker(D(f))$.
   Par conséquent $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$.
   De même $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$, d'où $Im(A(f)) + Im(B(f)) \subset Im(D(f))$.
   Réciproquement soit $y \in Im(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que

   $$y = D(f)(x) = A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x) \in Im(A(f)) + Im(B(f))$$

   Par conséquent $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. On a $M = DA'B' = AB'$, donc $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, d'où $ker(A(f)) \subset ker(M(f))$.
   De même $ker(B(f)) \subset ker(M(f))$, d'où $ker(A(f)) + ker(B(f)) \subset ker(M(f))$.
   Réciproquement soit $x \in ker(M(f))$, alors $M(f)(x) = 0$.
   Or

   $$x = A'(f) \circ P(f)(x) + B'(f) \circ Q(f)(x)$$

   avec $B(f)(A'(f) \circ P(f)(x)) = (BA'P)(f)(x) = (MP)(f)(x) = P(f) \circ M(f)(x) = 0$.
   De même $A(f)(B'(f) \circ Q(f)(x)) = 0$, d'où $x \in ker(B(f)) + ker(A(f))$.
   Par conséquent $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.

4. On a $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, donc $Im(M(f)) \subset Im(A(f))$.
   De même $Im(M(f)) \subset Im(B(f))$, d'où $Im(M(f)) \subset Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.
   Réciproquement soit $y \in Im(A(f)) \cap Im(B(f))$, alors il existe $x_A, x_B \in E$ tels que

$$y = A(f)(x_A) \text{ et } y = B(f)(x_B)$$

   Or
$$y = A'(f) \circ P(f)(y) + B'(f) \circ Q(f)(y)$$

   avec

$$A'(f)\circ P(f)(y) = (A'PB)(f)(x) = M(f)\circ P(f) \in Im(M(f)) \text{ et } B'(f)\circ Q(f)(y) \in Im(M(f))$$

   Donc $y \in Im(M(f))$.
   Par conséquent $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

$\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer le lemme des noyaux.

Réponse. Soit E un espace vectoriel, $u \in L(E)$, $P_1, ..., P_n \in K[X]$ premiers entre eux deux à deux et $P = P_1 ... P_n$, alors

$$ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n} ker(P_i(u))$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et en utilisant une identité de Bézout entre des polynômes adaptés. □

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
On suppose que u est nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, montrer que la famille $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre
2. Montrer que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est stable par u, puis écrire la matrice de l'endomorphisme induit par la restriction dans la base $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$.

Démonstration. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$. On suppose que la famille est liée, alors il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{p-1} \in K$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

On considère

$$p = min\{k \in [\![0, q-1]\!], \lambda_k \neq 0\}$$

Or, comme $u^{q-1}(x) \neq 0$, on a nécessairement $p < q - 1$. De plus

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k = 0$$

Puis on considère

$$\forall k \in [\![p+1, q-1]\!], \mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_p}$$

Ainsi

$$u^p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^k(x) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{p+j}(x)$$

Donc

$$u^{q-1}(x) = u^{q-1-p}(u^p(x)) = \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x) = 0$$

ce qui est absurde.
Par conséquent la famille est libre.
Soit $y \in F$, alors il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{p-1} \in K$ tels que

$$y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x)$$

Donc, comme $u^q(x) = 0$,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+1}(x) = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{k-1} u^k(x) \in F$$

D'où F est u-stable.
De plus, en notant $b = (x, u(x), ...u^{q-1}(x))$, on a

$$Mat_b(u_{|F}) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & (0) & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \simeq End(\mathbb{C}^n)$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que les vecteurs propres communs à A et B sont dans $ker(C)$.
2. On suppose que $ker(C) = \{0\}$, montrer que C est inversible et calculer la trace de $ABC^{-1} - BA^{-1}$. En déduire que $ker(C) \neq \{0\}$
3. Montrer que $ker(C)$ est stable par A et B.
4. On note A' (respectivment B') l'endomorphisme induit par la restriction de A (respectivement B) à $ker(C)$. Montrer que A' et B' admettent un vecteur propre commun.
5. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
6. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables, ie qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que les matrices PAP^{-1}, PBP^{-1} et PCP^{-1} soient triangulaires supérieures.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre commun à A et B.
   Alors il existe $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{C}$ tels que
   $$Ax = \lambda_A x, Bx = \lambda_B x$$
   Ainsi
   $$Cx = ABx - BAx = \lambda_B Ax - \lambda_A Bx = \lambda_B \lambda_A x - \lambda_A \lambda_B x = 0$$
   D'où $x \in ker(C)$.
2. Si $ker(C) = \{0\}$ alors C est inversible, donc
   $$C^{-1}AB - C^{-1}BA = I_n$$
   D'où, comme B et C^{-1} commutent, $0 = tr(I_n) = n$ ce qui est absurde, donc $ker(C) \neq \{0\}$.

3. Soit $x \in ker(C)$, alors $CAx = ACx = 0$, donc $Ax \in ker(C)$, ie $ker(C)$ est A-stable. De même $ker(C)$ est B-stable.
4. A' et B' commutent car

$$\forall y \in ker(C), ABy - BAy = Cy = 0$$

Ainsi A' et B' admettent un vecteur propre commun $x \in ker(C)$.
En effet, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A' admet au moins un valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Puis $ker(A' - \lambda I)$ est stable par B' car A' et B' commutent. Donc l'endomorphisme induit par la restriction de B' à $ker(A' - \lambda I)$ admet une valeur propre μ : il existe $x \in ker(A' - \lambda I) \backslash \{0\}$ tel que $B'x = \mu$, et $A'x = \lambda x$.
5. Par conséquent $Ax = A'x = \lambda x, Bx = B'x = \mu x$ et $Cx = 0 = 0x$, d'où x est un vecteur propre commun à A, B, C.
6. On complète la famille (x) en une base $(x, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et on note P la matrice de passage avec la base canonique.
Ainsi

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & \overline{A} \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & (*) \\ (0) & \overline{B} \end{pmatrix}, P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ (0) & \overline{C} \end{pmatrix}$$

On a donc $\overline{AB} - \overline{BA} = \overline{C}, \overline{AC} = \overline{CA}$ et $\overline{BC} = \overline{CB}$.
Par conséquent une récurrence sur la dimension permet de conclure.

□

Question de cours. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in L(E)$, montrer que si u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?

Démonstration. Si $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ alors toutes les valeurs propres de u sont simples et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Or les sous-espaces propres sont en somme directe, ainsi

$$dim \left(\bigoplus_{i=1}^{n} ker(u - \lambda_i id_E) \right) = n$$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{n} ker(u - \lambda_i id_E)$ et u est diagonalisable. □

Exercice. On considère E le sous-espace vectoriel des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$
Déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. Soit $A \in M_2(K)$, alors
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \Longleftrightarrow a + d = 0 \Longleftrightarrow a = -d$$
Donc
$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$
Ainsi $b = (E_1, E_2, E_3)$ est une famille génératrice de E, de plus il s'agit d'une famille libre, donc (E_1, E_2, E_3) est une base de E, d'où E est de dimension 3.
2. On a $f(E_1) = -4E_3, f(E_2) = 2E_1 + 2E_2, f(E_3) = -2E_3$.
Donc
$$C := Mat_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
3. On détermine χ_C puis on diagonalise C avec les matrices de passage pour obtenir
$$\forall n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & -(1 + (-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$
Donc pour $n \in \mathbb{N}$, comme $Mat_b(f^n) = C^n$, on obtient
$$f^n(A) = af^n(E_1) + bf^n(E_2) + cf^n(E_3) = 2^n \begin{pmatrix} b & b \\ 2a(-1)^n - b(1 + (-1)^n) + c(-1)^n & -b \end{pmatrix}$$

□

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(u_i)_{i\in I} \in (L(E))^I$ diagonalisbles. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les u_i commutent deux à deux.
2. Il existe une base commune de diagonalisation dans E pour les u_i.

Démonstration.

1. $2 \Rightarrow 1$ se montre directement car des matrices diagonales commutent.
2. Réciproquement on raisonne par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$:
   - L'initialisation est immédiate.
   - On suppose le résultat vrai pour les espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à $n-1$.
     Si tous les u_i sont des homothéties alors le résultat est clair.
     Sinon il existe $j \in I$ tel que u_j ne soit pas une homothétie. Or u_j est diagonalisble, donc
     $$E = \bigoplus_{\lambda\in Sp(u_j)} ker(u_j - \lambda id_E)$$
     avec pour tout $\lambda \in Sp(u_j)$, $E_\lambda(u_j) = ker(u_j - \lambda id_E)$ de dimension au plus $n-1$.
     Puis comme les u_i commutent, les $E_\lambda(u_j)$ sont stables par les u_i.
     On peut donc considérer les restrictions des u_i) $E_\lambda(u_j)$ qui sont diagonalisables car les u_i sont diagonalisables.
     On peut donc appliquer l'hyothèse de récurrence pour obtenir une base de codiagonalisation des restrictions puis obtenir une base de codiagonalisation des u_i par concaténation.

□