Question de cours. Enoncer le lemme d'Abel.

Réponse. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in D(0,r)$.

Exercice. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, a_0 = \alpha \in \mathbb{R}, a_1 = \beta \in \mathbb{R}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Démonstration. L'équation caractéristique associée à la suite a récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

de solution double $r = 1$, ainsi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda + \mu n$$

Or $\alpha = a_0 = \lambda$ et $\beta = a_1 = \lambda + \mu$, d'où $\lambda = \alpha$ et $\mu = \beta - \lambda = \beta - \alpha$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha + (\beta - \alpha)n$$

Si $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq 0$ alors $R_a = 1$.
Si $\alpha = \beta = 0$ alors $R_a = +\infty$.
Si $\alpha \neq \beta$ alors $R_a = 1$. □

Exercice. Soit f la fonction somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$.
On suppose que

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$$

1. On suppose de plus $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, montrer que $\sum a_n$ converge de somme égale à l.
2. Sans cet hypothèse montrer que ce résultat est faux en général.

Démonstration.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, alors

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - l = (f(x) - l) + \left(\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right) - \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n\right) =: A_N + B_N - C_N$$

   Or $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq n_0, |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

   Donc si $N \geq n_0$,

$$|C_N| \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

On définit alors $x_N = 1 - \frac{1}{N}$ pour avoir

$$|C_N| \leq \varepsilon$$

D'autre part

$$|B_N| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1 - x_N^n)\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|(1 - x_N^n) \leq (1 - x_N)\sum_{n=0}^{N} n|a_n| = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n|$$

Or $na_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par moyenne de Cesàro, $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N} n|a_n| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi, il existe $n_1 \geq n_0$, tel que si $N \geq n_1$ alors

$$|B_N| \leq \varepsilon$$

Enfin $f(x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ et $x_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc il existe $n_2 \geq n_1$ tel que si $N \geq n_2$ alors

$$|A_N| = |f(x_N) - l| \leq \varepsilon$$

D'où finalement

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

2. On considère $a_n = (-1)^n$, donc $f(x) = \frac{1}{1+x} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ mais la série $\sum a_n = \sum(-1)^n$ diverge grossièrement.

$\square$

Exercice. On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$\forall x \in\,]-1, +\infty[,\, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et en déduire le développement en série entière en 0.

Démonstration. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale (avec domination sur tout compact) pour obtenir que pour tout $x \in\,]-1, +\infty[$,

$$f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$$

Puis par intégration par partie en primitivant $\frac{1}{(x+t)^2}$, on obtient

$$f'(x) = \left[\frac{e^{-t}}{x+t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}dt = -\frac{1}{e(x+1)} + f(x)$$

D'où f vérifie l'équation différentielle

$$f'(x) - f(x) + \frac{1}{e(x+1)} = 0$$

On suppose que f est développable en série entière noté $\sum a_n x^n$.
Or la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ de somme $\sum(-1)^n x^n$.
On obtient donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-1} x^n = 0$$

ie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-1} x^n = 0$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} - a_n = (-1)^n e^{-1}$$

Ainsi par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{a_0}{n} + e^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k} k!}{n!}$$

Réciproquement une série entière $\sum a_n x^n$, avec les a_n définies par la relation précédente, vérifie l'équation différentielle et est bien définie sur $]-1,1[$.
De plus il s'agit de l'unique solution par théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. $\square$

Question de cours. Enoncer la règle de d'Alembert.

Réponse. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in [0,+\infty]$, alors $R_a = \frac{1}{l}$.

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente.
Or par croissance comparée, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a_n r^n\right)$$

Donc par comparaison $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est absolument convergente, d'où le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est $+\infty$. □

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme $f(z)$.

1. Soit $r \in]0, R[$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

2. En déduire que si f admet un maximum local en 0, alors f est une fonction constante.

Démonstration.

1. Soit $r \in]0, R[$, alors la série $\sum a_n r^n$ converge absoluùment.
   Or pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$|f(re^{it})|^2 = f(re^{it})\overline{f(re^{it})} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-int}$$

   produit de Cauchy de séries absolument convergentes, donc

$$|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(k-(n-k))t}\right) r^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t}\right) r^n$$

   De plus la série de fonctions continues $t \longmapsto \sum \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t} r^n$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$, on peut donc utiliser le théorème d'interversion somme et intégrale pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t} r^n dt = 2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}$$

   car $\int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)t} dt = 0$ si $2k \neq n$.

2. On a d'après la question précédente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(|f(re^{it})|^2 - |f(0)|^2 \right) dt \leq 0$$

pour r assez petit car f admet un maximum local en 0. D'où $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que f est constante.

□

Exercice. On considère f définie par

$$\forall x \in \,]-1, 1[, f(x) = \frac{arcin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle, en déduire le développement en série entière de f et donner le rayon de convergence.

Démonstration. La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$, comme quotient et composé de telles fonctions, et pour $x \in \,]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{arcsin'(x)\sqrt{1-x^2} - arcsin(x)(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + \frac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + xf(x)}{1+x^2}$$

ie f est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0, f(0) = 0$$

De plus la fonction f est développable en série entière comme quotient de telles fonctions. Or la fonction f est impaire, donc $a_n = 0$ pour n pair, ainsi on peut noter son développement en série entière $\sum a_n x^{2n+1}$.
Puis le développement en série entière de f' est $\sum (2n+1) a_n x^{2n}$, ainsi, en reportant ces deux séries entières dans l'équation différentielle, on obtient par unicité des coefficients d'une série entière la relation suivante

$$a_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Puis, après calculs,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, par critère de d'Alembert, le rayon de convergence est 1. □

Question de cours. Une fonction de classe C^∞ est-elle développable en série entière ? Si oui donner son développement en série entière au voisinage de 0. Si non connaissez-vous un contre-exemple. La réciproque est-elle vraie ?

Réponse. Une fonction f développable en série entière $\sum a_n x^n$ est de classe C^∞ au voisinage de 0 et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Cependant la réciproque est fausse, par exemple

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x)$$

définie une fonction de classe C^∞ non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ mais $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}}}{\pi^{\sqrt{n^2+2n}}} = \pi^{\sqrt{(n+1)^2+2n+2}-\sqrt{n^2+2n}}$$

Or

$$\sqrt{(n+1)^2+2n+2} - \sqrt{n^2+2n} = \frac{(n+1)^2+2n+2-n^2-2n}{\sqrt{(n+1)^2+2n+2}+\sqrt{n^2+2n}}$$

$=$

$$\frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)^2+2n+2}+\sqrt{n^2+2n}} = \frac{\frac{2n+3}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{2}{n+1}}+\sqrt{\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

D'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$$

Ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n y^n$ est $\frac{1}{\pi}$, puis celui de la série entière $\sum u_n x^{2n}$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. □

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, calculer la partie imaginaire de $\frac{sin(\theta)e^{i\theta}}{1-xsin(\theta)e^{i\theta}}$, en déduire le développement en série entière de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto arctan\left(x - \frac{1}{tan(\theta)}\right)$$

Démonstration. On a bien $xsin(\theta)e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et

$$\frac{sin(\theta)e^{i\theta}}{1-xsin(\theta)e^{i\theta}} = \frac{sin(\theta)e^{i\theta}(1-xsin(\theta)e^{-i\theta})}{|1-xsin(\theta)e^{i\theta}|^2} = \frac{sin(\theta)e^{i\theta}-xsin(\theta)^2}{1-2xsin(\theta)cos(\theta)+x^2sin(\theta)^2}$$

D'où

$$Im\left(\frac{sin(\theta)e^{i\theta}}{1-xsin(\theta)e^{i\theta}}\right) = \frac{sin(\theta)^2}{1-2xsin(\theta)cos(\theta)+x^2sin(\theta)^2}$$

Or la fonction f est dérivable comme composée de telles fonctions et

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(x-\frac{1}{tan(\theta)}\right)^2} = \frac{tan(\theta)^2}{tan(\theta)^2-tan(\theta)^2x^2+2tan(\theta)x+1}$$

$$= \frac{sin(\theta)^2}{sin(\theta)^2 - sin(\theta)^2x^2 + 2sin(\theta)cos(\theta)x + cos(\theta)^2} = \frac{sin(\theta)^2}{1 - sin(\theta)^2x^2 + 2sin(\theta)cos(\theta)x}$$

D'où

$$f'(x) = Im\left(\frac{sin(\theta)e^{i\theta}}{1 - xsin(\theta)e^{i\theta}}\right)$$

Or, si $|xsin(\theta)| < 1$, on a le développement en série suivant

$$\frac{sin(\theta)e^{i\theta}}{1 - xsin(\theta)e^{i\theta}} = sin(\theta)e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty}(xsin(\theta)e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}sin(\theta)^{n+1}e^{i\theta(n+1)}x^n$$

Ainsi

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}sin(\theta)^{n+1}sin(\theta(n+1))x^n$$

D'où

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin(\theta)^n sin(\theta n)}{n}x^n = \theta - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin(\theta)^n sin(\theta n)}{n}x^n$$

□

Exercice. On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \int_0^1 t^k sin(tx)dt$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) + (k+1)f(x) = sin(x)$$

2. Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de

$$xy' + (k+1)y = sin(x)$$

en précisant le rayon de convergence.

Démonstration.

1. On vérifie le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour obtenir

$$f'(x) = \int_0^1 t^{k+1}cos(tx)dt$$

Puis par intégration par parties, si $x \neq 0$,

$$f'(x) = \left[t^k\frac{sin(tx)}{x}\right]_0^1 - \int_0^1(k+1)t^k\frac{sin(tx)}{x}dt = \frac{sin(x)}{x} - \frac{k+1}{x}f(x)$$

D'où

$$xf'(x) + (k+1)f(x) = sin(x)$$

ce qui est également vérifié en $x = 0$.

2. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ série entière solution de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}(k+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

ie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty}(k+1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

D'où, par unicité du développement en série entière, $a_n = 0$ si n pair et sinon

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(k+1+2n+1)(2n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+k+2)(2n+1)!}$$

Ainsi $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$.
Synthèse : Réciproquement $\sum a_n z^n$ vérifie bien l'équation différentielle souhaitée.

$\square$