Question de cours. Enoncer le théorème de sommation par paquets pour des familles de réels positifs.

Réponse. Soit I et J deux ensembles, $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si pour tout $j \in J$, $(a_i)_{i\in I_j}$ est sommable, et dans ce cas

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} a_i$$

Exercice. Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la famille $(x^{kl})_{k,l\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$
avec $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Démonstration.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors, comme $|x| < 1$,
$$\sum_{l\in\mathbb{N}^*} |x^{kl}| = \frac{|x|^k}{1-|x|^k}$$
Or, toujours comme $|x| < 1$, on a $\frac{|x|^k}{1-|x|^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} |x|^k$, donc la série $\sum\sum |x|^{kl}$ est convergente, ce qui montre, par théorème de permutation des sommes, que la famille $(x^{kl})_{k,l\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.
2. D'un côté on a d'après ce qui précède
$$\sum_{k,l\in\mathbb{N}^*} x^{kl} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{x^k}{1-x^k}$$
Et d'un autre côté on a
$$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2, kl = n\} =: \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$$
Donc
$$\sum_{k,l\in\mathbb{N}^*} x^{kl} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{(k,l)\in I_n} x^{kl} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |I_n| x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} d(n)x^n$$

□

Exercice. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, montrer que

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$$

Démonstration. On considère, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, $u_{p,q} = a^{p(2q-1)}$.
Alors la série $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}^*} u_{p,q}$ est absolument convergente car $a < 1$ et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \frac{|a|^{2q-1}}{1 - |a|^{2q-1}}$$

De plus la série $\sum\limits_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$ est convergente car $\frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}} \underset{q \to +\infty}{=} o\left(|a|^{2q-1}\right)$ (ou par la règle de d'Alembert).
Par conséquent par théorème de sommation par paquets $(u_{p,q})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} a^{p(2q-1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a^{p(2q-1)}$$

Ainsi par permutation des indices grâce à la bijection $2q - 1 \in 2\mathbb{N}^* - 1 \longmapsto q \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1 - a^p} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^{2q-1}}{1 - a^{2q-1}}$$

□

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K un corps fini de cardinal q.

1. Calculer le cardinal de $GL_n(K)$.
   Indication : Dénombrer les bases de K^n.
2. En déduire le cardinal de $SL_n(K)$.
3. On considère T l'ensemble des matrices carrés de taille n à coefficients dans K, triangulaires supérieures avec uniquement des 1 sur la diagonale, montrer que T est un sous-groupe de $GL_n(K)$ et calculer son cardinal.

Réponse.

1. $|GL_n(K)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} (q^i - 1)$.
2. $|SL_n(K)| = \frac{|GL_n(K)|}{|K^*|} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{i=2}^{n} (q^i - 1)$.
3. $|T| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Démonstration.

1. On considère l'application $\varphi : GL_n(K) \longrightarrow (K^n)^n$ définie par, pour $M \in GL_n(K)$, $\varphi(M) = (C_1, ..., C_n)$ en notant $C_1, ..., C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice M.
   Or, pour $M \in GL_n(K)$, ses vecteurs colonnes $C_1, ..., C_n$ forment une base de l'espace vectoriel $C_1, ..., C_n$.
   Ainsi, l'application φ est à valeurs dans l'ensemble des bases vectorielles de K^n.
   De plus, l'application φ est injective et surjective, donc bijective.

Par conséquent $|GL_n(K)|$ est égal au nombre de bases vectorielles de K^n.
Or, pour avoir une base de K^n, il faut et il suffit de choisir un vecteur non nul dans K^n ($q^n - 1$ choix possibles) puis de choisir un vecteur non colinéaire au premier ($q^n - q$ choix possibles), puis un vecteur n'appartenant pas au plan engendré par les deux premiers vecteurs ($q^n - q^2$ choix possibles), ainsi de suite, jusqu'à choisir le n-ième vecteur parmi les vecteurs de K^n n'appartenant pas au sous-espace engendré par les $n-1$ vecteurs précédemment choisis ($q^n - q^{n-1}$ choix possibles).
On a donc $(q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1}(q^n - q^j)$ choix possibles pour une base de K^n.
Par conséquent, d'après ce qui précède,

$$|GL_n(K)| = \prod_{j=0}^{n-1}(q^n - q^j) = \prod_{j=0}^{n-1} q^j(q^{n-j} - 1) = q^{\sum_{j=0}^{n-1} j} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)$$

2. En considérant le morphisme de groupes surjectif déterminant $det : GL_n(K) \longrightarrow K^*$, on a $SL_n(K) = \ker(\det)$
Donc
$$|SL_n(K)| = \frac{|GL_n(K)|}{|K^*|} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=2}^{n}(q^i - 1)$$

3. L'ensemble T est en bijection avec $K^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
En effet pour choisir une matrice dans T il faut et il suffit de choisir $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments dans K correspondants aux coefficients supérieurs de la matrice.
Par conséquent
$$|T| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$\square$

Question de cours. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux (uniques) tels que

$$x = \frac{p}{q}$$

On peut donc considérer l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ x = \frac{p}{q} & \longmapsto & (p,q) \end{array}$$

Soit $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$ et $x_2 = \frac{p_2}{q_2}$ tels que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, alors $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$, d'où $x_1 = x_2$ ce qui montre que φ est injective.
Ainsi $\mathbb{Q}$ s'injecte dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ inclus dans $\mathbb{Z}^2$ dénombrable comme produit cartésien d'ensembles dénombrables. □

Exercice. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la famille $\left(\frac{1}{a^m+b^n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $a > 1, b > 1$.

Démonstration.
Sens indirect : On suppose $a \leq 1$.
Alors la sous-famille $\left(\frac{1}{a^m+b^0}\right)$ n'est pas sommable car la série $\sum \frac{1}{a^m+1}$ est grossièrement divergente.
Il en va de même si $b \leq 1$.
Sens direct : On suppose $a < 1$ et $b < 1$.
Par théorème d'associativité la famille est sommable si et seulement si la série $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{m+n=p} \frac{1}{a^m+b^n} \right)$ est convergente.
On note $c = min(a,b) < 1$.
On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{m+n=p} \frac{1}{a^m+b^n} \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{c^k + c^{p-k}} \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{c^{\frac{p}{2}}} = \frac{p+1}{c^{\frac{p}{2}}} \underset{p\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

D'où, par théorème, la famille est sommable. □

Exercice. On dit que $x \in \mathbb{C}$ est algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$ et on appelle de degré de x

$$n = inf\,\{deg(P), P \in \mathbb{Z}[X], P(x) = 0\}$$

1. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les nombres algébriques de degré au plus n forment un ensemble dénombrable.
3. En déduire que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{C}$ algébrique de degré 1 : il existe $P = aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ tel que
$$ax + b = P(x) = 0$$
Ainsi $x = -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.
Réciproquement, de même, si $x \in \mathbb{Q}$ alors x est algébrique de degré 1.
2. Soit $x \in \mathbb{C}$ algébrique de degré au plus n : il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré au plus n tel que $P(x) = 0$, ainsi il existe $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ tels que
$$a_n x^n + ... + a_0 = 0$$
Ainsi les nombres algébriques de degré au plus n s'injectent dans $\mathbb{Z}^{n+1}$ qui est dénombre comme produit cartésien d'ensembles dénombrables.
Par conséquent les éléments algébriques de degré au plus n forment un ensemble dénombrable.
3. L'ensemble des éléments algébriques est la réunion sur $n \in \mathbb{N}^*$ des ensembles dénombrables des éléments algébriques de degré au plus n, ainsi les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable.

$\square$

Exercice. On considère, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, $N(r)$ le nombre de points de $\mathbb{Z}^2$ de norme inférieure ou égale à r.
Montrer que $N(r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \pi r^2$ l'aire du disque de rayon r.
Indication : Considérer les carrés $C_x = \left\{t \in \mathbb{R}^2, |t_1 - x_1| \leq \frac{1}{2}, |t_2 - x_2| \leq \frac{1}{2}\right\}$ pour $x \in \mathbb{Z}^n$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Z}^2$, on considère le carré de côté 1 centrée en x
$$C_x = \left\{t \in \mathbb{R}^2, |t_1 - x_1| \leq \frac{1}{2}, |t_2 - x_2| \leq \frac{1}{2}\right\}$$
Ces carrés sont d'aire 1, donc, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, l'aire de la réunion des $x \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\|x\| \leq r$ est
$$\mathcal{A}\left(\bigcup C_x\right) = N(r)$$
Or on a
$$\forall x \in \mathbb{Z}^2, \forall t \in C_x, \|t - x\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$
Donc, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\forall x \in \overline{D}(0, r), \forall t \in C_x, \|t\| \leq \|x\| + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq r + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
Ainsi
$$\bigcup C_x \subset \overline{D}\left(0, r + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

D'où, d'après l'égalité précédente, $N(r) \leq \pi \left(r + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.
De même, pour $r > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\overline{D}\left(0, r - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \subset \bigcup C_x$$

Donc

$$\pi \left(r - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq N(r) \leq \pi \left(r + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Ce qui montre bien que

$$N(r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \pi r^2$$

$\square$

Question de cours. Enoncer et déomontrer le théorème de comparaison pour deux familles sommables positives.

Réponse. Soit I un ensemble et $((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in (\mathbb{R}_+^I)^2$ tels que $\forall i \in I, a_i \leq b_i$ et $(b_i)_{i\in I}$ soit sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

Démonstration. Soit $J \subset I$ fini, alors

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in J} b_i \leq \sum_{i\in I} b_i < +\infty$$

D'où $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

□

Exercice. Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ bijectif, montrer la divergence de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$$

On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$$

Or σ est bijective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

D'où

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{n+1}{8n} \geq \frac{1}{8}$$

Ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas, ce qui montre que la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente. □

Exercice. On note $l^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommables et on définit la norme $\|\cdot\|$ sur $l^1(\mathbb{Z})$ par $\|u\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$.

1. Soit $u, v \in l^1(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. On définit $(u * v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u * v \in l^1(\mathbb{Z})$.
3. Montrer que $\|u * v\| \leq \|u\| \|v\|$.

4. Montrer que $*$ est une loi associative, commutative et possédant un élément neutre sur $l^1(\mathbb{Z})$.
5. On considère $u \in l^1(\mathbb{Z})$ défini par $u_0 = 1, u_1 = -1, \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}, u_n = 0$. Montrer que u n'est pas inversible dans $(l^1(\mathbb{Z}), *)$.

Démonstration.

1. Comme $v \in l^1(\mathbb{Z})$, la famille $(|v_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est majorée par une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi
$$\forall k \in \mathbb{Z}, |u_k v_{n-k}| \leq M|u_k|$$
Or $u \in l^1(\mathbb{Z})$, donc $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Pour $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable car $v \in l^1(\mathbb{Z})$, de somme
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$
Or la famille $\left(|u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable car $u \in l^1(\mathbb{Z})$, de somme
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$
Ainsi la famille $(u_k v_{n-k})_{k,n\in\mathbb{Z}}$ est sommage de somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$.
Par conséquent la famille $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, de même somme, d'où $u*v \in l^1(\mathbb{Z})$.
3. Puis en prenant les modules on obtient
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$
Ainsi
$$\|u * v\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \|u\| \, \|v\|$$
4. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $(u * v)_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l$.
Donc, pour $u, v \in l^1(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(u * v)_n = \sum_{k+l=n} u_k v_l = (v * u)_n$$
ce qui montre la commutativité de $*$.
Puis pour l'associativité, pour $u, v, w \in l^1(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$((u * v) * w)_n = \sum_{k+l=n} (u * v)_k w_l = \sum_{k+l=n} \sum_{i+j=k} u_i v_j w_l = \sum_{i+j+l=n} u_i v_j w_l = (u * (v * w))_n$$
Et l'élément neutre est donnée par δ_0 défini par $\delta_{0,n} = 1$ si $n = 0$ et $\delta_{0,n} = 0$ sinon,
$$(u * \delta_0)_n = \sum_{k+l=n} u_k \delta_{0,l} = u_n$$

5. On suppose que u soit inversible et notons v son inverse. Alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \delta_{0,n} = (u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = v_n - v_{n-1}$$

Ainsi, pour $n \geq 1$, on obtient $v_n = v_{n-1}$, d'où, par récurrence immédiate, $v_n = v_0$.
Or $v \in l^1(\mathbb{Z})$, donc $v_0 = 0$.
Puis, pour $n = 0$ dans l'égalité précédente, on obtient $1 = v_0 - v_{-1}$ ie $v_{-1} = -1$.
Donc, pour $n \leq -1$, $v_{n-1} = v_n$, d'où, par récurrence immédiate, $v_n = v_{-1} = -1$ ce qui n'est pas possiblle car $v \in l^1(\mathbb{Z})$.
Par conséquent u n'admet pas d'inverse dans $(l^1(\mathbb{Z}), *)$.

□

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a_n le nombre de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2. Indication : aboutir à une relation de récurrence.

Réponse. On a $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$.

Démonstration. Déterminons une relation de récurrence entre les a_n.

1. Pour commencer on a $a_1 = 1, a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.
2. Puis pour calculer a_{n-1} on partitionne l'ensemble des dispositions dans un damier de taille $2 \times n + 1$ selon que la case $(1, n+1)$ est recouverte par un domino vertical ou horizontal.
   Dans le premier cas il reste à recouvrir un damier de taille $2 \times n$ soit a_n possibilités.
   Dans le second cas il reste à recouvrir un damier de taille $2 \times n - 1$ soit a_{n-1} possibilités.
   Par conséquent on obtient la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

   On réconnait la suite de Fibonnaci décalé d'un rang.
   L'équation caractéristique de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $x^2 - x - 1 = 0$ de solutions réelles distinctes $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Donc il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $a_n = u \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + v \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.
   Puis avec les cas a_1 et a_2 on obtient les valeurs de u et v pour conclure que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

□