Question de cours. Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

Exercice. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que pour $x = f'(u), y = f'(v) \in f'(I)$ il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{f(u+h) - f(u)}{h} < z < \frac{f(v+h) - f(v)}{h}$$

En déduire que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice. On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, ..., n$ de façon équiproblable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ si $p \mid n$.
2. Soit $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants ie : pour tout $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., k\}$,

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$

3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Que peut-on dire de l'image (et de l'image réciproque) d'une partie connexe par arcs par une application continue ? Le démontrer.

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0,1]$, $X_1, ..., X_n$ variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$.
2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice. On considère un chat Gribouille. Gribouille a trois états X possibles : 1 il mange, 2 il dort, 3 il joue.
Le comportement de Gribouille est une chaine de Markov et on a : A l'instant n (pour $n \in \mathbb{N}$) :
- Si Gribouille mange alors la probabilité que Gribouille dorme à l'instant $n+1$ est $\frac{1}{3}$ et celle que Gribouille joue est $\frac{1}{2}$.
- Si Gribouille dort alors la probabilité que Gribouille mange à l'instant $n+1$ est $\frac{1}{3}$ et celle que Gribouille joue est $\frac{1}{2}$.
- Si Gribouille joue alors la probabilité que Gribouille mange à l'instant $n+1$ est $\frac{2}{3}$ et celle que Gribouille dorme est $\frac{1}{3}$.

Le maitre de Gribouille part à l'instant 0 pendant que son chat Gribouille dort : Il rentre à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité que Gribouille dorme encore ?

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Quelles sont exactement les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$? Le démontrer.

Exercice. Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p_n = \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle va être la loi limite de X_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice.

1. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{2^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ dont la loi est définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$$
Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance, ie
$$\mathbb{E}(X) = +\infty$$
2. On considère une variable aléatoire discrète X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^* = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$
Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que X admet une espérance finie mais pas de moment d'ordre 2, ie
$$\mathbb{E}(X^2) = +\infty$$

Exercice. Soit A une partie d'un espace d'un espace vectoriel normé E et $f : A \longrightarrow F$ continue avec F un espace vectoriel normé.
On suppose que f est localement constante ie pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est constante sur $A \cap B(a, r)$.

1. Soit $a, b \in A$ et γ un chemin continu reliant a et b, montrer que
$$sup\{s \in [0,1], f(\phi(s)) = f(a)\} = 1$$
2. En déduire que f est constante sur A.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche