Question de cours. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Réponse.
Etape 1 : Soit X une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Alors pour $t \in [-1,1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (tp+1-p)^n$$

Etape 2 : Soit X une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Alors pour $t \in [-1,1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

Etape 3 : Soit X une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Alors pour $t \in [-1,1]$, on a

$$G_X(t) = \xrightarrow[k=0]{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda+\lambda t}$$

Exercice. Soit $a, t \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer qu'on a

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme dans $\{-1,1\}$. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer qu'on a

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$$

3. En déduire

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Démonstration.

1. On a par croissance et bijectivité de l'exponentielle et inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}}$$

2. Par indépendance et identique distribution des X_n on a

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) = \mathbb{E}(e^{tX_1})^n$$

Or, par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} = ch(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

où la pénultième égalité est justifiée par étude de la fonction $f(t) = e^{\frac{t^2}{2}} - ch(t)$. Ainsi

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{t^2 n}{2}}$$

3. Grâce aux deux questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-ta} e^{\frac{t^2 n}{2}} = e^{t\left(\frac{tn}{2} - a\right)}$$

D'où, pour $t = \frac{a}{n}$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

□

Exercice. On considère une particule qui possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Cette particule peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- Si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- Si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$

On suppose également que $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. On note $\mu_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$. Déterminer $A \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $\mu_{n+1} = \mu_n A$.
3. En déduire la loi de X_n.
4. Montrer que les lois μ_n admettent une limite quand $n \to +\infty$.
5. On considère $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = 1\}$. Déterminer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Démonstration.

1. La variable aléatoire X_1 est à valeurs dans $\{1, 2\}$ et par formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Ainsi X_1 est de loi binomiale de paramètre $\frac{5}{8}$.

2. De même on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_{n+1}=1\mid X_n=1)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_{n+1}=1\mid X_n=2)\mathbb{P}(X_n=2)$$
$$=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=2)$$

et
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n=2)$$

D'où
$$\mu_{n+1}=\mu_n\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

3. On a donc par récurrence immédiate

$$\mu_n=\mu_0 A^n$$

Or $\chi_A=(X-1)\left(X-\frac{1}{4}\right)$ scindé à racines simples, donc A est diagonalisable de valeurs propres simples 1 et $\frac{1}{4}$.
De plus on a $E_1(A)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{\frac{1}{4}}(A)=Vect\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)$.
Donc
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

Puis
$$\mu_n=\mu_0\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{4^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

4. On a par continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie)

$$\mu_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mu_0\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=...=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

5. On a

$$\mathbb{P}(T=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_0=2)=\mathbb{P}(X_0=2)\mathbb{P}(X_1=1\mid X_0=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

Puis
$$\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(X_k=1,X_{k-1}=2,...,X_0=2)$$
$$=\mathbb{P}\left(X_k=1\mid X_{k-1}=2,...,X_0=2\right)\mathbb{P}\left(X_{k-1}=2,...,X_0=2\right)$$
$$=\mathbb{P}(X_k=1\mid X_{k-1}=2)\mathbb{P}(X_{k-1}=2\mid X_{k-2}=2,...,X_0=2)\mathbb{P}(X_{k-2}=2,...,X_0=2)$$
$$=...=\mathbb{P}(X_k=1\mid X_{k-1}=2)\mathbb{P}(X_{k-1}=2,X_{k-2}=2)...\mathbb{P}(X_1=2\mid X_0=2)\mathbb{P}(X_0=2)=\frac{3^{k-1}}{2^{2k+1}}$$

$\square$

Question de cours. Enoncer la loi faible des grands nombres.

Réponse. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant une moment d'ordre 1 fini, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_1)\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice.

1. Montrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer la somme.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

   (a) Vérifier que l'égalité précédente définit bien une loi conjointe.

   (b) Montrer que X et Y suivent la même loi.

   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

1. Soit $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \frac{i}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}} = \frac{i}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{i+1}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{i+1}{2^{i-1}}$$

   Puis

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{2^{i-1}} + 2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

   On a donc une famille sommable de somme $8 = 2^3$.

2. (a) On a bien d'après ce qui précède

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$$

   (b) Soit $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \mathbb{P}(Y = i)$$

   Donc X et Y ont la même loi donné par

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}$$

(c) On a

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0$$

Mais

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{4}\neq 0$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$\square$

Exercice. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire entière positive indépendante des précédentes. On considère la variable $S := \sum_{n=1}^{N} X_n$.

Montrer que $G_S = G_N \circ G$, où G est la fonction génératrice commune des X_n.

Démonstration. Soit $t\in[-1,1]$, alors

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=k)t^k$$

avec, par formule des probabilités totales et indépendance,

$$\forall k\in\mathbb{N}, \mathbb{P}(S=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=k,N=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=k,N=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=k)\mathbb{P}(N=n)$$

Ainsi

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(S_n=k)t^k$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(S_n=k)|t|^k\leq 1$$

Donc la famille est sommable et on peut intervertir les sommes, d'où

$$G_S(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n=k)t^k=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)G_{S_n}(t)$$

Puis par indépendance

$$G_S(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)G(t)^n=G_N(G(t))$$

Ainsi $G_S=G_N\circ G$. $\square$

Exercice.

1. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{2^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ dont la loi est définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$$
Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.
2. On considère une variable aléatoire discrète X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$
Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité et que X admet une espérance finie mais pas de moment d'ordre 2.

Démonstration.

1. On a bien
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$
Cependant
$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \mathbb{P}(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$a_n := \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+2}$$
Donc
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{4}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{2}{k} = 1 - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$
De plus on a $na_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$, donc
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = +\infty$$
Cependant $n^2 a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4}{n}$, donc
$$\mathbb{E}(X^2) = +\infty$$

$\square$

Question de cours. Donner la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quels sont les liens entre les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire et sa fonction génératrice ?

Réponse. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors, pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

On a ainsi

$$G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$$

et

$$G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

D'où

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

Exercice. On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, ..., n$ de façon équiproblable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ si $p \mid n$.
2. Soit $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants ie : pour tout $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., k\}$,
$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$
3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Démonstration.

1. On considère $\Omega = \{1, ..., n\}$, la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme, ainsi
$$\forall k \in \Omega, \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$$
On suppose que $p \mid n$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = \alpha p$, alors
$$A_p = \{kp, k \leq \alpha, k \in \mathbb{N}^*\}$$
Donc $|A_p| = \alpha$ et $\mathbb{P}(A_p) = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p}$.
2. Soit $i_1, ..., i_r \in [\![1, k]\!]$ et $m \in \mathbb{N}$, alors, comme les p_{i_j} sont premiers et distincts, $p_{i_1} \mid m, ..., p_{i_r} \mid m$ si et seulement si $p_{i_1}...p_{i_r} \mid m$.
Donc
$$A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}} = A_{p_{i_1}...p_{i_r}}$$
Ainsi, d'après la question précédente,
$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}...p_{i_r}}) = \frac{1}{p_{i_1}...p_{i_r}} = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$
Donc les A_{p_j} sont indépendants.

3. On considère B_n l'ensemble des diviseurs de n inférieurs à n, alors $|B_n| = \phi(n)$.
   Soit $p_1, ..., p_n$ les diviseurs premiers de n, on a alors pour $l \in \mathbb{N}^*$, $l \in B_n$ si et seulement si $l \leq n$ et l n'est pas multiple d'aucun des p_i pour $i \in [\![1, k]\!]$.
   Ainsi
$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_{p_i}^c$$
   Or les A_i sont indépendants, donc les A_i^c également, d'où
$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{p_i}^c) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$
   De plus $\mathbb{P}$ étant uniforme, on a
$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{|B_n|}{n} = \frac{\phi(n)}{n}$$
   D'où
$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p | n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$\square$

Exercice. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein
$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0, 1]$, $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$
2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que
$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$
3. Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Démonstration.

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètre n, x.
   Ainsi, par lemme de transfert,
$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

2. On a par inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\delta) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > n\delta) \leq \frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2}$$

Or $S_n \sim B(n,x)$, donc

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. La fonction f est continue sur $[0,1]$ compact, donc par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1$.
Donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x,y \in [0,1], |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Ainsi pour $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\alpha\right\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}}\right)$$

Ainsi, avec ce qui précède,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Ainsi

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Or $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ pour $n \geq N$.
Donc, pour $n \geq N$,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

Ce qui montre que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

$\square$