Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions.

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow E$ tels que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

On note $u = \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\| dt} \int_a^b f(t)dt$ et $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$ la décomposition de $f(t)$ dans la décomposition $E = Vect(u) \overset{\perp}{\bigoplus} (Vect(u))^{\perp}$.
Montrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\| \, u$.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cos(x)^n sin(x) \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère $g_n = (n+1)f_n$.
   (a) Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Quelle est la limite de $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)dt\right)$?

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme $f(z)$.
1. Soit $r \in]0, R[$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

2. En déduire que si f admet un maximum local en 0, alors f est une fonction constante.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Quels sont les liens entre la convergence normale et la convergence uniforme d'une série de fonctions ?

Exercice. On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $]a, b[$.

Exercice. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0, 1]$, $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$

2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Par quoi peut-on approximer une fonction continue par morceaux sur un segment ? Le démontrer.

Exercice. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)t^k dt = 0$$

Montrer que $f \equiv 0$.

Exercice. On considére la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Exercice. On considèrela fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Montrer que $\varphi = |\cdot|$.
Indication : On pourra commencer par supposer le résultat vrai pour les nombres diadiques (de la forme $\frac{p}{2^k}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, 2^k]\!]$).

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche