Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions.

Réponse. Soit E un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé de dimension finie, $f_n : E \longrightarrow F$ continue et $f : E \longrightarrow F$ tels que

$$\|f_n - f\|_\infty = \underset{x\in E}{sup} \|f_n(x) - f(x)\|_F \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors f est continue.

Démonstration. Soit $x \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Or f_n est continue en x, donc il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y \in E$ tel que $\|x - y\|_E$, on ait

$$\|f_n(x) - f_n(y)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \|f(x) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f_n(y)\|_F + \|f_n(y) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

D'où f est continue en x puis sur E. □

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow E$ tels que

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| = \int_a^b \|f(t)\|\, dt$$

On note $u = \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\|dt} \int_a^b f(t)dt$ et $f(t) = \alpha(t)u + v(t)$ la décomposition de $f(t)$ dans la décomposition $E = Vect(u) \overset{\perp}{\bigoplus} (Vect(u))^\perp$.
Montrer que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \|f(t)\|\, u$.

Démonstration. Par linéarité de l'intégration on a

$$\langle u, \int_a^b v(t)dt\rangle = \int_a^b \langle u, v(t)\rangle dt = 0$$

car $v(t) \in Vect(u)^\perp$.
Donc $\int_a^b v(t)dt \in Vect(u)^\perp$.
Or

$$\int_a^b \|f(t)\|\, dtu = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \alpha(t)dtu + \int_a^b v(t)dt$$

Donc, par somme directe,

$$\int_a^b \|f(t)\|\, dt = \int_a^b \alpha(t)dt$$

De plus, par théorème de Pythagore, on a

$$\forall t \in [a,b], \|f(t)\|^2 = \alpha(t)^2 \|u\|^2 + \|v(t)\|^2 = \alpha(t)^2 + \|v(t)\|^2 \geq \alpha(t)^2$$

D'où $\|f\| \geq \alpha$.
Ainsi $\|f\| - \alpha$ est une fonction positive d'intégrale nulle car, d'après ce qui précède,

$$\int_a^b (\|f(t)\| - \alpha(t))dt = 0$$

Par conséquent $\alpha = \|f\|$ puis $v = 0$ ce qui donne

$$\forall t \in [a,b], f(t) = \|f(t)\| u$$

$\square$

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : \begin{array}{rcl} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cos(x)^n sin(x) \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère $g_n = (n+1)f_n$.
   (a) Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Quelle est la limite de $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)dt\right)$?

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Par continuité de sin en 0, il existe $\delta \in\in \mathbb{R}_+^*$ tel que

   $$\forall x \in [0,\delta], |sin(x)| \leq \varepsilon$$

   Donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,\delta], |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

   Puis

   $$\forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], |f_n(x)| \leq cos(\delta)^n$$

   Or $|cos(\delta)| < 1$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N, \forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

   Par conséquent

   $$\forall n \geq N, \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

   Ce qui montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

2. (a) Soit $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], |g_n(x)| \leq (n+1)cos(x)^n \leq (n+1)cos(\delta)^n$$

avec $(n+1)cos(\delta)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|cos(\delta)| < 1$.

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)dx = [-cos(x)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$$

Par théorème de convergence dominée (la contraposée), il n'existe pas de domination.

□

Exercice. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme $f(z)$.

1. Soit $r \in]0, R[$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

2. En déduire que si f admet un maximum local en 0, alors f est une fonction constante.

Démonstration.

1. Soit $r \in]0, R[$, alors la série $\sum a_n r^n$ converge absoluùment.
Or pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$|f(re^{it})|^2 = f(re^{it})\overline{f(re^{it})} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-int}$$

produit de Cauchy de séries absolument convergentes, donc

$$|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(k-(n-k))t}\right) r^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t}\right) r^n$$

De plus la série de fonctions continues $t \longmapsto \sum \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t} r^n$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$ car

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e_{i(2k-n)} r^n \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} \left\| a_k \overline{a_{n-k}} e_{i(2k-n)} r^n \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{n} |a_k||a_{n-k}| r^n$$

terme d'une série convergente comme produit de Cauchy de séries absolument convergentes.
On peut donc utiliser le théorème d'interversion somme et intégrale pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)t} r^n dt = 2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}$$

car $\int_0^{2\pi} e^{i(2k-n)t} dt = 0$ si $2k \neq n$.

2. On a d'après la question précédente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(|f(re^{it})|^2 - |f(0)|^2 \right) dt \leq 0$$

pour r assez petit car f admet un maximum local en 0. D'où $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que f est constante.

$\square$

Question de cours. Quels sont les liens entre la convergence normale et la convergence uniforme d'une série de fonctions ?

Réponse. La convergence normale implique la convergence uniforme mais la réciproque n'est pas vérifiée.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé de dimension finie et $f_n : E \longrightarrow F$ tels que $\sum f_n$ converge normalement.
Alors $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente, donc de Cauchy, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty - \sum_{k=0}^{m} \|f_k\|_\infty\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} f_k - \sum_{k=0}^{m} f_k\right\|_\infty = \left\|\sum_{k=min(n,m)}^{max(n,m)} f_k\right\|_\infty \leq \sum_{k=min(n,m)}^{max(n,m)} \|f_k\|_\infty = \left|\sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty - \sum_{k=0}^{m} \|f_k\|_\infty\right| \leq \varepsilon$$

D'où $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc est uniformément convergente.
Pour un contre-exemple à la réciproque, on peut considérer

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right[\cup \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\end{cases}$$

Ainsi $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, d'où $\sum \|f_n\|_\infty$ n'est pas convergente, donc la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente.
Mais, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \leq \frac{1}{n}$$

Donc $\left\|\sum_{k=0}^{n} f_k\right\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, d'où $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle. □

Exercice. On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Démonstration. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de fonction dérivée $f_n' : x \longmapsto -ln(n)\frac{1}{n^x}$.
2. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum \frac{1}{n^x}$ converge comme somme de Riemann avec $x > 1$.

3. Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall x \in [a,b], |f_n'(x)| = ln(n)\frac{1}{n^x} \leq ln(n)\frac{1}{n^a}$$

avec $\sum ln(n)\frac{1}{n^a}$ convergente par croissance comparée.
Donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$, donc uniformément.

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation sous le sigme somme, $\zeta = \sum f_n$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ de fonction dérivée $\zeta' : x \longmapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} ln(n)\frac{1}{n^x}$ □

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $]a,b[$.

Démonstration. Soit $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x < y$ dans $[\alpha,\beta]$, alors, par inégalité des pentes

$$\frac{f_n(a)-f_n(\alpha)}{a-\alpha} \leq \frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y} \leq \frac{f_n(b)-f_n(\beta)}{b-\beta}$$

Or, par convergence simple, $\frac{f_n(a)-f_n(\alpha)}{a-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(a)-f(\alpha)}{a-\alpha}$ et $\frac{f_n(b)-f_n(\beta)}{b-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(b)-f(\beta)}{b-\beta}$, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$-M \leq \frac{f_n(a)-f_n(\alpha)}{a-\alpha} \leq \frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y} \leq \frac{f_n(b)-f_n(\beta)}{b-\beta} \leq M$$

Ainsi tous les f_n sont M-lipschitziennes sur $[\alpha,\beta]$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on considère un recouvrement fini $(x_0,...,x_r)$ de $[\alpha,\beta]$ avec un pas $\frac{\varepsilon}{3M}$.
Puis, par convergence simple, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall k \in [\![0,r]\!], |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi pour $x \in [\alpha,\beta]$, il existe $k \in [\![0,r-1]\!]$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$, en particulier on a $|x-x_k| \leq \frac{\varepsilon}{3M}$, donc

$$|f_n(x)-f(x)| \leq |f_n(x)-f_n(x_k)| + |f_n(x_k)-f(x_k)| + |f(x_k)-f(x)|$$

$$\leq M|x-x_k| + \frac{\varepsilon}{3} + M|x_k - x| \leq \varepsilon$$

car une limite simple de fonctions M-lipschitzienne est M-lipschitzienne. □

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0,1]$, $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$

2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Démonstration.

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètre n, x.
   Ainsi, par lemme de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

2. On a par inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\delta) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > n\delta) \leq \frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2}$$

   Or $S_n \sim B(n,x)$, donc

$$\sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. La fonction f est continue sur $[0,1]$ compact, donc par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1$.
   Donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

   Ainsi pour $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$

   Donc, par inégalité triangulaire,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\alpha\right\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}}\right)$$

   Ainsi, avec ce qui précède,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Ainsi

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Or $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ pour $n \geq N$.
Donc, pour $n \geq N$,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

Ce qui montre que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

$\square$

Question de cours. Par quoi peut-on approximer une fonction continue par morceaux sur un segment ? Le démontrer.

Réponse. Toute fonction continue par morceaux sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Démonstration. On considère un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Etape 1 : On suppose f continue. Alors, par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. Donc il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b], |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Or $\frac{b-a}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leq \delta$.
On considère, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, et la fonction $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier par

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, \varphi(x) = f(x_k), \varphi(b) = f(b)$$

Ainsi pour tout $x \in [a,b]$, si $x \neq b$ alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}[$, ainsi $|x - x_k| \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \leq \delta$, d'où, par continuité uniforme,

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

De même si $x = b$.
Par conséquent $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
Etape 2 : On considère une subdivision $(x_0, ..., x_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f.
Or pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$. Ainsi il existe $\varphi_k : [x_k, x_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que

$$\|f - \varphi_k\|_\infty \leq \varepsilon$$

On considère alors $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux définie par

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \varphi(x_k) = f(x_k)$$

Et

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \varphi(x) = \varphi_k(x)$$

Ainsi $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$. □

Exercice. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t) t^k dt = 0$$

Montrer que $f \equiv 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Par théorème de Weierstrass il existe une fonction polynomiale $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\int_a^b f(t)^2 dt = \int_a^b f(t)(f(t) - p(t))dt + \int_a^b f(t)p(t)dt$$

Or en notant $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, on a, par linéarité de l'intégration et l'hypothèse,

$$\int_a^b f(t)p(t)dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b f(t)t^k dt = 0$$

Ainsi

$$\int_a^b f(t)^2 dt \leq \int_a^b |f(t)||f(t) - p(t)|dt \leq \varepsilon \int_a^b |f(t)|dt$$

Puis en considérant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, on obtient $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$, d'où, par continuité, $f \equiv 0$. □

Exercice. On considére la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :
   (a) Si $x < 0$ alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.
   (b) Si $x \geq 0$ alors $f_n(x)$ est le terme général d'une série alternée tel que $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant.
   Donc, par critère des séries alternées, $\sum f_n(x)$ est convergente.

   Par conséquent $\Delta = \mathbb{R}_+$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par critère des séries alternées,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

   D'où R_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus tous les f_n sont continues, donc, par théorème de continuité sous le signe somme, $f = \sum f_n$ est continue.

$\square$

Exercice. On considèrela fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Montrer que $\varphi = |\cdot|$.
<u>Indication</u> : On pourra commencer par supposer le résultat vrai pour les nombres diadiques (de la forme $\frac{p}{2^k}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, 2^k]\!]$).

Démonstration.
<u>Etape 1 : φ est bien définie</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq \frac{x^2}{2^n}$ avec $\left(\frac{x^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable car $\frac{1}{2} < 1$. Donc $\varphi(x)$ est bien défini.
<u>Etape 2 : Egalité sur les nombres dyadiques</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$, alors, par changement d'indice,

$$\varphi(2x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = 2\varphi(x)$$

et pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$

Or, pour $n \leq 0$, $f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) = f(2^{-n}x + 2^{-n}) = f(2^{-n}x)$, d'où

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) + 2\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x+1}{2^n} + \frac{-2x+1}{2} = x + \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} = 1$$

De plus $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi(1) = 1$, puis $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, de façon générale on montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, pour $p \in [\![0, 2^k]\!]$,

$$\varphi\left(\frac{p}{2^k}\right) = \frac{p}{2^k}$$

En effet on suppose le résultat au rang k, alors pour $p \in [\![0, 2^k]\!]$, on a

$$\varphi\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{p}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\frac{p}{2^k} = \frac{p}{2^{k+1}}$$

et pour $p \in \left]2^k, 2^{k+1}\right]$, alors $p' = p - 2^k \in [\![1, 2^k]\!]$ et

$$\varphi\left(\frac{p}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{p'}{2^k} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{p'}{2^k}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}\frac{p' + 2^k}{2^k} = \frac{p}{2^{k+1}}$$

Etape 3 : Continuité et égalité sur $[0,1]$: Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \longmapsto 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est continue sur $[-A, A]$ et pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{A}{2^N} \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\forall n \geq N, \forall x \in [-A, A], \left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x^2}{2^n} \leq \frac{A^2}{2^n}$$

et

$$\forall n < N, \left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^{-n}}\frac{1}{4}$$

Or les séries $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{A^2}{2^n}$ et $\sum\limits_{n=-\infty}^{N-1} \frac{1}{2^{-n}}\frac{1}{4}$ convergent, on en déduit que φ est une série normalement convergente sur $[-A, A]$.
Par conséquent, par théorème de continuité sous le sigme somme, φ est continue sur $\mathbb{R}$.
En particulier φ est continue sur $[0,1]$ et les nombres diadiques sont denses dans $[0,1]$, donc $\varphi = id_{[0,1]}$ sur $[0,1]$.
Etape 3 : Egalité sur $\mathbb{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{x}{2^m} \in [0,1]$, donc

$$\varphi(x) = \varphi\left(2^m \frac{x}{2^m}\right) = 2^m \varphi\left(\frac{x}{2^m}\right) = 2^m \frac{x}{2^m} = x$$

Puis φ est une fonction paire, donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$. $\square$