Question de cours. Enoncer la définition de la densité et sa caractérisation séquentielle.

Réponse. Soit E un esppace vectoriel normé et D une partie de E. Alors on dit que D est dense dans E si son adhérence (pour la norme de E) coïncide avec E. De plus les assertions suivantes sont équivalentes :

1. D est dense dans E,
2. Pour tout $x \in E$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $\|x - x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Que peut-on dire de l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ de F ?

Démonstration. Si $F = E$ alors $\overset{\circ}{F} = E$. Sinon $F \neq E$. On suppose que $\overset{\circ}{F} \neq \varnothing$. Alors il existe $x \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$B(x, r) \subset F$$

Ainsi, comme F est un sous-espace vectoriel

$$B(0, r) = B(x, r) - x \subset F$$

Puis

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(0, nr) \subset F$$

Ce qui contredit $F \neq E$. Par conséquent $\overset{\circ}{F} = \varnothing$. □

Exercice. Soit E un espace métrique.

1. Soit A un ouvert de E et $B \subset E$. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
2. Soit $A \subset E$. On dit que A est localement fermé dans E si pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x dans E tel que $V_x \cap A$ fermé dans V_x.
   (a) On suppose que A est localement fermé. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U_x de E tel que $U_x \cap A$ soit fermé dans U_x.
   (b) Montrer que A est localement fermé si et seulement si A est l'intersection d'un ouvert de E et d'un fermé de E.

Démonstration.

1. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Alors $x \in A$ ouvert, donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x, r) \subset A$. De plus $x \in B$, donc il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, r) \subset A$ pour tout $n \geq N$. Ainsi $(x_{n+N})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $A \cap B$ convergeant vers x, d'où $x \in \overline{A \cap B}$.
2. (a) Soit $x \in A$, alors il existe un voisinage V_x de x dans E tel que $V_x \cap A$ soit fermé dans V. Ainsi il existe un fermé F de E tel que $V_x \cap A = V_x \cap F$. On considère $U_x := \overset{\circ}{V_x}$ ouvert de E contenant x et on a $U_x \cap A = U_x \cap V_x \cap A = U_x \cap V_x \cap F = U_x \cap F$ car $U_x \subset V_x$, d'où $U_x \cap A$ est fermé dans U_x.

(b) Sens direct : On suppose A localement fermé. Alors, d'après la question précédente, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans E tel que $U_x \cap A$ soit fermé dans U_x. On considère ensuite $O = \bigcup_{x \in E} U_x$ ouvert de E et $F = \overline{A}$ fermé de E. Montrons que $A = O \cap F$.

i. On a $A \subset O$ et $A \subset F$, donc $A \subset O \cap F$.

ii. Soit $y \in O \cap F$.
Alors $y \in O$, donc il existe $x \in A$ tel que

$$y \in U_x$$

De plus $y \in F = \overline{A}$, donc, d'après la première question,

$$y \in U_x \cap F = U_x \cap \overline{A} \subset \overline{U_x \cap A}$$

On suppose que $y \notin A$, alors

$$y \in U_x \backslash (U_x \cap A) =: W$$

avec W ouvert de U_x car $U_x \cap A$ est un fermé de U_x. De plus U_x est ouvert dans E, donc W est ouvert dans E.
Or $(U_x \cap A) \cap W = (U_x \cap A) \cap (U_x \backslash (U_x \cap A)) = \varnothing$, donc $U_x \cap A \subset E \backslash W$ fermé de E, donc $\overline{U_x \cap A} \subset E \backslash W$, ainsi

$$\overline{U_x \cap A} \cap W = \varnothing$$

ce qui contredit $y \in \overline{U_x \cap A} \cap W$. Par conséquent $y \in A$ et $O \cap F \subset A$.

Sens indirect : On suppose qu'il existe un ouvert O et un fermé F de E tels que $A = O \cap F$. Soit $x \in A$. Alors $x \in 0$, donc O est un voisinage de x dans E. Ainsi $O \cap A = O \cap (O \cap F) = O \cap F$ est un fermé de O.

□

Exercice. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $\{x \in H, x > 0\}$ est minoré. On notera alors $m = \inf\{x \in H, x > 0\}$.
2. On suppose $m > 0$. Montrer que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose $m = 0$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration.

1. Comme $H \neq \{0\}$, il existe $x_0 \in H \backslash \{0\}$. Si $x_0 > 0$ alors $x_0 \in \{x \in H, x > 0\}$. Sinon $-x_0 > 0$ et, comme H est un groupe, $-x_0 \in H$, d'où $-x_0 \in \{x \in H, x > 0\}$. Dans les deux cas $\{x \in, x > 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, donc admet une borne inférieure.
2. On suppose $m \notin H$. Or, par définition de la borne inférieure, il existe $x \in H$ tel que

$$m < x < 2m$$

Puis il existe $y \in H$ tel que

$$m < y < x$$

Ainsi
$$x - y > 0, x - y \in H, x - y < m$$
ce qui contredit la définitio de m, d'où $m \in H$. Par la suite on a
$$m\mathbb{Z} \subset H$$
Réciproquement soit $x \in H$. On suppose $x \notin m\mathbb{Z}$. On considère k l'unique entier tel que
$$mk < x < m(k+1)$$
Alors
$$0 < x - mk < m, x - mk \in H$$
ce qui contredit la définition de m, d'où $x \in m\mathbb{Z}$ puis $H = m\mathbb{Z}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Quitte à considérer $-a$, on peut supposer $a \geq 0$.
Comme $m = 0$, il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \varepsilon$.
On considère $n = Ent\left(\frac{a}{x}\right)$. Alors
$$n \leq \frac{a}{x} < n + 1$$
Donc
$$nx \leq a < nx + x < nx + \varepsilon$$
D'où
$$|a - nx| \leq \varepsilon, nx \in H$$
Ce qui montre que H est dense dans $\mathbb{R}$.

$\square$

Question de cours. Enoncer le théorème de Weierstrass.

Réponse. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors les fonctions polynomiales forment une partie dense de $C^0([a, b], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence de la boule unité ouverte coïncide avec la boule unité fermée.

Démonstration. On considère $B_f(0, 1)$ la boule unitée fermée de E. Alors $B_f(0, 1)$ est fermée dans E comme image réciproque du fermé $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $\|\cdot\|$. Ainsi, comme $\overline{B(0, 1)}$ est le plus petit fermé contenant $B(0, 1)$, on a

$$\overline{B(0, 1)} \subset B_f(0, 1).$$

Réciproquement soit $x \in B_f(0, 1)$. Si $\|x\| < 1$ alors $x \in B(0, 1) \subset \overline{B(0, 1)}$. Sinon $\|x\| = 1$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) x \in B(0, 1)$. Ainsi $\|x_n - x\| = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $x \in \overline{B(0, 1)}$. Par conséquent

$$B_f(0, 1) \subset \overline{B(0, 1)}.$$

□

Exercice. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note (x, y) le segment $[\min(x, y), \max(x, y)]$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la relation R sur U par

$$\forall x, y \in U, xRy \iff (x, y) \subset U$$

1. Montrer que R définit une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation R. Montrer que $C(x)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
4. En déduire que U se décompose en une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Démonstration.

1. La relation est réflexive et symétrique.
   Soit $x, y, z \in U$ tels que xRy et yRz. Alors

   $$(x, y), (y, z) \subset U$$

   Ainsi

   $$(x, z) \subset (x, y) \cup (y, z) \subset U$$

   Donc la relation est transitive.
   Par conséquent R définit une relation d'équivalence.

2. Soit $a, b \in C(x)$. Donc
$$(a,x),(b,x) \subset U$$
Soit $y \in (a,b)$, alors
$$(a,y) \subset (a,b) \subset (a,x) \cup (b,x) \subset U$$
Donc
$$(x,y) \subset (a,y) \cup (a,x) \subset U$$
D'où $y \in C(x)$, ce qui montre que $(a,b) \subset C(x)$, i.e. que $C(x)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. On suppose $C(x)$ borné. On note alors $y = \sup(C(x)$. Si $y \in C(x)$ alors
$$(x,y) = [x,y] \subset U$$
Or U est ouvert, donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$[x, y+\varepsilon] \subset U$$
Ainsi $y + \varepsilon \in C(x)$ ce qui contredit la définition de y. Donc $y \notin C(x)$. De même on a $\inf(C(x)) \notin C(x)$. Par conséquent, comme $C(x)$ est un intervalle,
$$C(x) =]\inf(C(x)), \sup(C(x))[$$
On suppose $C(x)$ minorée et non majorée. Alors, d'après la question précédente, $C(x)$ est de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ avec $a = \inf(C(x))$. Comme précédement, on a nécessairement $a \notin C(x)$, d'où
$$C(x) =]a, +\infty$$
De même si $C(x)$ est majorée et non minorée.
On suppose $C(x)$ non majorée et non minorée. Alors, d'après la question précédente,
$$C(x) =]-\infty, +\infty[$$
Dans tous les cas, $C(x)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

4. Comme R est une relation d'équivalence,
$$U = \bigsqcup_{x \in U} C(x)$$
avec, d'après la question précédente, $C(x)$ intervalle ouvert pour tout $x \in U$.
De plus $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Q} \cap U$ est dense dans U. On a premièrement
$$\bigsqcup_{x \in \mathbb{Q} \cap U} C(x) \subset U$$
Réciproquement soit $y \in U$. Alors il existe $x \in U$ tel que
$$y \in C(x) =]a, b[$$

avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $\varepsilon = \min(x-a, x-b)$ et $x_\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap U$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Alors $x_\varepsilon \in]a, b[= C(x)$, d'où

$$(y, x_\varepsilon) \subset (y, x) \cup (x, x_\varepsilon) \subset U$$

Ainsi

$$y \in C(x_\varepsilon)$$

, ce qui montre que

$$U = \bigsqcup_{x \in \mathbb{Q} \cap U} C(x)$$

□

Exercice. Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.

Démonstration.

1. On suppose que est ouvert. Alors

$$A + B = \bigcup_{y \in B} (A + \{y\})$$

avec $A + \{y\} = f_y^{-1}(A)$ ouvert de E comme image réciproque de A ouvert par l'application continue $f_y : x \in A \longmapsto x + y$. Ainsi $A + B$ est ouvert.

2. On suppose que A est compact et B fermé. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (A + B)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $z \in E$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
Or A est compact, donc il existe une extractrice φ et $x \in A$ tel que $x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.
Ainsi $y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} z - x$, d'où, comme B est fermé, $z - x \in B$, i.e. $z \in A + B$.
Donc, par caractérisation séquentielle des fermés, $A + B$ est fermé.

□

Question de cours. Soit E un espace vectoriel normé, $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E et $(F_j)_{j\in J}$ une famille de fermés de E. Que peut-on dire de $\bigcup_{i\in I} O_i$, $\bigcap_{i\in I} O_i$, $\bigcup_{j\in J} F_j$ et $\bigcap_{j\in J} F_j$?

Réponse. Une réunion d'ouverts est ouverte et une intersection finie d'ouverts est ouverte. Par complémentarité, une intersection de fermés est fermée et une réunion finie de fermés est fermée.

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infini

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que l'ensemble A des suites croissantes est un fermé de E.
2. Montrer que l'ensemble B des suites convergeantes vers 0 est un fermé de E.

Démonstration.

1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $u_\infty \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Or

   $$|u_{\infty,n} - u_{k,n}| \leq \|u_\infty - u_k\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Donc, par croissance des u_k,

   $$u_{\infty,n} = \lim_{k\to+\infty} u_{k,n} \leq \lim_{k\to+\infty} u_{k,n+1} = u_{\infty,n+1}$$

   D'où $u_\infty \in A$.
   Par conséquent, par caractérisation séquentielle des fermés, A est un fermé de E.
2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $u_\infty \in B$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\|u_k - u\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Or $u_k \in B$, donc il existe $N = N_k \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N, |u_{k,n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Ainsi

   $$\forall n \geq N, |u_{\infty,n}| \leq |u_{\infty,n} - u_{k,n}| + |u_{k,n}| \leq \|u_\infty - u_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

□

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E. On peut donc considérer

$$diam(A) := \sup_{x,y\in A} \|x - y\|$$

1. Montrer que $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornés dans E.
2. Comparer $diam(\overset{\circ}{A}), diam\left(\overline{A}\right)$ et $diam(A)$.

3. (a) Soit $x \in A$ et $u \in E \backslash \{0\}$. Montrer que $\sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ existe.
   (b) En déduire que toute demi-droite issue de $x \in A$ coupe $Fr(A)$.
   (c) Montrer que $diam(Fr(A)) = diam(A)$.

Démonstration.

1. Comme A est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Soit $x \in \overline{A}$, alors, par caractérisation séquentielle, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
   Ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$$
   Puis, par continuité de la norme et passage à la limite, $\|x\| \leq M$, ce qui montre que $\overline{A}$ est bornée.
   Puis $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $Fr(A) \subset \overline{A}$, donc $\overset{\circ}{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornées.
2. Par inclusion on a
   $$diam(\overset{\circ}{A}) \leq diam(A) \leq diam(\overline{A})$$
   La première inégalité n'est pas une égalité. En effet si on considère $A = [1, 2] \cup \{3\}$ dans $E = \mathbb{R}$ alors
   $$diam(\overset{\circ}{A}) = 1 < 2 = diam(A)$$
   Par contre la seconde inégalité est une égalité. En effet, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, par définition de la borne supérieure, il existe $x, y \in \overline{A}$ tels que
   $$\|x - y\| \geq diam(\overline{A}) - \varepsilon$$
   Or, par définition de l'adhérence, il existe $x', y' \in A$ tels que
   $$\|x - x'\| \leq \varepsilon, \|y - y'\| \leq \varepsilon$$
   Ainsi
   $$\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y'\| + \|y' - y\| \leq 2\varepsilon + \|x' - y'\|$$
   D'où
   $$\|x' - y'\| \geq \|x - y\| - 2\varepsilon \geq diam(\overline{A}) - 3\varepsilon$$
   Donc $diam(A) \geq diam(\overline{A})$ ce qui montre l'égalité.
3. (a) Comme A est borné, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$.
   Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $x + tu \in A$. Alors
   $$\|x + tu\| \leq M$$
   Ainsi
   $$\|tu\| \leq \|x + tu\| + \|x\| \leq 2M$$
   D'où $t \leq \frac{2M}{\|u\|}$, ce qui montre que $\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ est majoré.

(b) Soit $\{x+tu, t \in \mathbb{R}_+\}$ une demi-droite issue de $x \in A$ avec $u \in E \backslash \{0\}$.
D'après la question précédente, on peut considérer

$$t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R}_+, x+tu \in A\}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors, par définition de la borne supérieure de $\{t \in \mathbb{R}_+, x+tu \in A\}$, il existe $t_n \in \{t \in \mathbb{R}_+, x+tu \in A\}$ tel que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_0$. Puis, en notant $x_n := x+t_nu \in A$, on a

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x+tu$$

D'où $x+tu \in \overline{A}$.
De plus si $x+t_0u \in \overset{\circ}{A}$ alors il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$B(x+t_0u, r) \subset A$$

Or la demi-droite $\{x+tu, t \geq t_0\}$ intersecte $B(x+t_0u, r) \backslash \{x+t_0u\}$, donc il existe $t_1 > t_0$ tel que

$$x+t_1u \in B(x+t_0u, r) \subset A$$

ce qui contredit la définition de t_0. Par conséquent $x+t_0u \notin \overset{\circ}{A}$ puis

$$x+t_0u \in Fr(A)$$

On a donc montré que la demi-droite $\{t \in \mathbb{R}_+, x+tu \in A\}$ intersecte $Fr(A)$.

(c) On a premièrement $diam(Fr(A)) \leq diam(\overline{A}) = diam(A)$.
Réciproquement soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $x, y \in A$ tels que

$$\|x-y\| \geq diam(A) - \varepsilon$$

On considère $u = y - x$, ainsi, d'après la question précédente, il existe

$$z = x + t_0u \in Fr(A)$$

De même pour $u' = x - y$, il existe

$$z' = x + t_0'u' \in Fr(A)$$

En particulier $t_0 \geq 1$ car $x+u = x \in A$, donc $t_0 + t_0' \geq 1$.
Ainsi

$$\|z-z'\| = \|t_0u - t_0'u'\| = (t_0+t_0')\,\|x-y\| \geq \|x-y\| \geq diam(A) - \varepsilon$$

D'où

$$diam(Fr(A)) \geq diam(A) - \varepsilon$$

Puis

$$diam(Fr(A)) \geq diam(A)$$

ce qui montre l'égalité.

$\square$