

Question de cours. Donner la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Quels sont les liens entre les moments d'ordre 1 et 2 de la variable aléatoire et sa fonction génératrice ?

Réponse. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Alors, pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

On a ainsi

$$G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$$

et

$$G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X - 1))$$

D'où

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Que peut-on dire de l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ de F ?

Démonstration. Si $F = E$ alors $\overset{\circ}{F} = E$. Sinon $F \neq E$. On suppose que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Alors il existe $x \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$B(x, r) \subset F$$

Ainsi, comme F est un sous-espace vectoriel

$$B(0, r) = B(x, r) - x \subset F$$

Puis

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0, nr) \subset F$$

Ce qui contredit $F \neq E$. Par conséquent $\overset{\circ}{F} = \emptyset$. □

Exercice. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans \mathbb{N} , et N une variable aléatoire entière positive indépendante des

précédentes. On considère la variable $S := \sum_{n=1}^N X_n$.

Montrer que $G_S = G_N \circ G$, où G est la fonction génératrice commune des X_n .

Démonstration. Soit $t \in [-1, 1]$, alors

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k)t^k$$

avec, par formule des probabilités totales et indépendance,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = k, N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k, N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{P}(N = n)$$

Ainsi

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(S_n = k) t^k$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(S_n = k) |t|^k \leq 1$$

Donc la famille est sommable et on peut intervertir les sommes, d'où

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{S_n}(t)$$

Puis par indépendance

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G(t)^n = G_N(G(t))$$

Ainsi $G_S = G_N \circ G$. □

Exercice. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $\{x \in H, x > 0\}$ est minoré. On notera alors $m = \inf\{x \in H, x > 0\}$.
2. On suppose $m > 0$. Montrer que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose $m = 0$. Montrer que H est dense dans \mathbb{R} .

Démonstration.

1. Comme $H \neq \{0\}$, il existe $x_0 \in H \setminus \{0\}$. Si $x_0 > 0$ alors $x_0 \in \{x \in H, x > 0\}$. Sinon $-x_0 > 0$ et, comme H est un groupe, $-x_0 \in H$, d'où $-x_0 \in \{x \in H, x > 0\}$. Dans les deux cas $\{x \in H, x > 0\}$ est une partie non vide de \mathbb{R}_+ , donc admet une borne inférieure.
2. On suppose $m \notin H$. Or, par définition de la borne inférieure, il existe $x \in H$ tel que

$$m < x < 2m$$

Puis il existe $y \in H$ tel que

$$m < y < x$$

Ainsi

$$x - y > 0, x - y \in H, x - y < m$$

ce qui contredit la définition de m , d'où $m \in H$. Par la suite on a

$$m\mathbb{Z} \subset H$$

Réciproquement soit $x \in H$. On suppose $x \notin m\mathbb{Z}$. On considère k l'unique entier tel que

$$mk < x < m(k+1)$$

Alors

$$0 < x - mk < m, x - mk \in H$$

ce qui contredit la définition de m , d'où $x \in m\mathbb{Z}$ puis $H = m\mathbb{Z}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Quitte à considérer $-a$, on peut supposer $a \geq 0$.
Comme $m = 0$, il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \varepsilon$.
On considère $n = \text{Ent}\left(\frac{a}{x}\right)$. Alors

$$n \leq \frac{a}{x} < n + 1$$

Donc

$$nx \leq a < nx + x < nx + \varepsilon$$

D'où

$$|a - nx| \leq \varepsilon, nx \in H$$

Ce qui montre que H est dense dans \mathbb{R} .

□

Question de cours. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Réponse.

Etape 1 : Soit X une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Alors pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (tp + 1 - p)^n$$

Etape 2 : Soit X une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Alors pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$$

Etape 3 : Soit X une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Alors pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda + \lambda t}$$

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence de la boule unité ouverte coïncide avec la boule unité fermée.

Démonstration. On considère $B_f(0, 1)$ la boule unité fermée de E . Alors $B_f(0, 1)$ est fermée dans E comme image réciproque du fermé $[0, 1]$ de \mathbb{R} par l'application continue $\|\cdot\|$. Ainsi, comme $\overline{B(0, 1)}$ est le plus petit fermé contenant $B(0, 1)$, on a

$$\overline{B(0, 1)} \subset B_f(0, 1).$$

Réciproquement soit $x \in B_f(0, 1)$. Si $\|x\| < 1$ alors $x \in B(0, 1) \subset \overline{B(0, 1)}$. Sinon $\|x\| = 1$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n := (1 - \frac{1}{n})x \in B(0, 1)$. Ainsi $\|x_n - x\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où $x \in \overline{B(0, 1)}$. Par conséquent

$$B_f(0, 1) \subset \overline{B(0, 1)}.$$

□

Exercice. Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E . On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.

Démonstration.

1. On suppose que E est ouvert. Alors

$$A + B = \bigcup_{y \in B} (A + \{y\})$$

avec $A + \{y\} = f_y^{-1}(A)$ ouvert de E comme image réciproque de A ouvert par l'application continue $f_y : x \in A \mapsto x + y$. Ainsi $A + B$ est ouvert.

2. On suppose que A est compact et B fermé. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (A + B)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $z \in E$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.

Or A est compact, donc il existe une extractrice φ et $x \in A$ tel que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Ainsi $y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z - x$, d'où, comme B est fermé, $z - x \in B$, i.e. $z \in A + B$.

Donc, par caractérisation séquentielle des fermés, $A + B$ est fermé. □

Exercice. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note (x, y) le segment $[\min(x, y), \max(x, y)]$. Soit U un ouvert de \mathbb{R} . On définit la relation R sur U par

$$\forall x, y \in U, xRy \iff (x, y) \subset U$$

1. Montrer que R définit une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation R . Montrer que $C(x)$ est un intervalle de \mathbb{R} .
3. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .
4. En déduire que U se décompose en une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Démonstration.

1. La relation est réflexive et symétrique.

Soit $x, y, z \in U$ tels que xRy et yRz . Alors

$$(x, y), (y, z) \subset U$$

Ainsi

$$(x, z) \subset (x, y) \cup (y, z) \subset U$$

Donc la relation est transitive.

Par conséquent R définit une relation d'équivalence.

2. Soit $a, b \in C(x)$. Donc

$$(a, x), (b, x) \subset U$$

Soit $y \in (a, b)$, alors

$$(a, y) \subset (a, b) \subset (a, x) \cup (b, x) \subset U$$

Donc

$$(x, y) \subset (a, y) \cup (a, x) \subset U$$

D'où $y \in C(x)$, ce qui montre que $(a, b) \subset C(x)$, i.e. que $C(x)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

3. On suppose $C(x)$ borné. On note alors $y = \sup(C(x))$. Si $y \in C(x)$ alors

$$(x, y) = [x, y] \subset U$$

Or U est ouvert, donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$[x, y + \varepsilon] \subset U$$

Ainsi $y + \varepsilon \in C(x)$ ce qui contredit la définition de y . Donc $y \notin C(x)$. De même on a $\inf(C(x)) \notin C(x)$. Par conséquent, comme $C(x)$ est un intervalle,

$$C(x) =]\inf(C(x)), \sup(C(x))]$$

On suppose $C(x)$ minorée et non majorée. Alors, d'après la question précédente, $C(x)$ est de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ avec $a = \inf(C(x))$. Comme précédemment, on a nécessairement $a \notin C(x)$, d'où

$$C(x) =]a, +\infty[$$

De même si $C(x)$ est majorée et non minorée.

On suppose $C(x)$ non majorée et non minorée. Alors, d'après la question précédente,

$$C(x) =]-\infty, +\infty[$$

Dans tous les cas, $C(x)$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

4. Comme R est une relation d'équivalence,

$$U = \bigsqcup_{x \in U} C(x)$$

avec, d'après la question précédente, $C(x)$ intervalle ouvert pour tout $x \in U$.

De plus \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , donc $\mathbb{Q} \cap U$ est dense dans U . On a premièrement

$$\bigsqcup_{x \in \mathbb{Q} \cap U} C(x) \subset U$$

Réciproquement soit $y \in U$. Alors il existe $x \in U$ tel que

$$y \in C(x) =]a, b[$$

avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit $\varepsilon = \min(x - a, x - b)$ et $x_\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap U$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Alors $x_\varepsilon \in]a, b[= C(x)$, d'où

$$(y, x_\varepsilon) \subset (y, x) \cup (x, x_\varepsilon) \subset U$$

Ainsi

$$y \in C(x_\varepsilon)$$

, ce qui montre que

$$U = \bigsqcup_{x \in \mathbb{Q} \cap U} C(x)$$

□

Question de cours. Énoncer le théorème de Weierstrass.

Réponse. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors les fonctions polynomiales forment une partie dense de $C^0([a, b], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infini

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que l'ensemble A des suites croissantes est un fermé de E .
2. Montrer que l'ensemble B des suites convergentes vers 0 est un fermé de E .

Démonstration.

1. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $u_\infty \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Or

$$|u_{\infty, n} - u_{k, n}| \leq \|u_\infty - u_k\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, par croissance des u_k ,

$$u_{\infty, n} = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k, n} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k, n+1} = u_{\infty, n+1}$$

D'où $u_\infty \in A$.

Par conséquent, par caractérisation séquentielle des fermés, A est un fermé de E .

2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $u_\infty \in B$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|u_k - u\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Or $u_k \in B$, donc il existe $N = N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_{k, n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi

$$\forall n \geq N, |u_{\infty, n}| \leq |u_{\infty, n} - u_{k, n}| + |u_{k, n}| \leq \|u_\infty - u_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

□

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E . On peut donc considérer

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$$

1. Montrer que $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} et $\text{Fr}(A)$ sont également bornés dans E .
2. Comparer $\text{diam}(\overset{\circ}{A})$, $\text{diam}(\overline{A})$ et $\text{diam}(A)$.
3. (a) Soit $x \in A$ et $u \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ existe.
(b) En déduire que toute demi-droite issue de $x \in A$ coupe $\text{Fr}(A)$.

(c) Montrer que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) = \text{diam}(A)$.

Démonstration.

1. Comme A est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Soit $x \in \bar{A}$, alors, par caractérisation séquentielle, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$$

Puis, par continuité de la norme et passage à la limite, $\|x\| \leq M$, ce qui montre que \bar{A} est bornée.

Puis $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $\text{Fr}(A) \subset \bar{A}$, donc $\overset{\circ}{A}$ et $\text{Fr}(A)$ sont également bornées.

2. Par inclusion on a

$$\text{diam}(\overset{\circ}{A}) \leq \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\bar{A})$$

La première inégalité n'est pas une égalité. En effet si on considère $A = [1, 2] \cup \{3\}$ dans $E = \mathbb{R}$ alors

$$\text{diam}(\overset{\circ}{A}) = 1 < 2 = \text{diam}(A)$$

Par contre la seconde inégalité est une égalité. En effet, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, par définition de la borne supérieure, il existe $x, y \in \bar{A}$ tels que

$$\|x - y\| \geq \text{diam}(\bar{A}) - \varepsilon$$

Or, par définition de l'adhérence, il existe $x', y' \in A$ tels que

$$\|x - x'\| \leq \varepsilon, \|y - y'\| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y'\| + \|y' - y\| \leq 2\varepsilon + \|x' - y'\|$$

D'où

$$\|x' - y'\| \geq \|x - y\| - 2\varepsilon \geq \text{diam}(\bar{A}) - 3\varepsilon$$

Donc $\text{diam}(A) \geq \text{diam}(\bar{A})$ ce qui montre l'égalité.

3. (a) Comme A est borné, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $x + tu \in A$. Alors

$$\|x + tu\| \leq M$$

Ainsi

$$\|tu\| \leq \|x + tu\| + \|x\| \leq 2M$$

D'où $t \leq \frac{2M}{\|u\|}$, ce qui montre que $\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ est majoré.

- (b) Soit $\{x + tu, t \in \mathbb{R}_+\}$ une demi-droite issue de $x \in A$ avec $u \in E \setminus \{0\}$.

D'après la question précédente, on peut considérer

$$t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors, par définition de la borne supérieure de $\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$, il existe $t_n \in \{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ tel que $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t_0$. Puis, en notant $x_n := x + t_n u \in A$, on a

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x + t_0 u$$

D'où $x + t_0 u \in \overline{A}$.

De plus si $x + t_0 u \in \overset{\circ}{A}$ alors il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$B(x + t_0 u, r) \subset A$$

Or la demi-droite $\{x + tu, t \geq t_0\}$ intersecte $B(x + t_0 u, r) \setminus \{x + t_0 u\}$, donc il existe $t_1 > t_0$ tel que

$$x + t_1 u \in B(x + t_0 u, r) \subset A$$

ce qui contredit la définition de t_0 . Par conséquent $x + t_0 u \notin \overset{\circ}{A}$ puis

$$x + t_0 u \in Fr(A)$$

On a donc montré que la demi-droite $\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ intersecte $Fr(A)$.

(c) On a premièrement $diam(Fr(A)) \leq diam(\overline{A}) = diam(A)$.

Réciproquement soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $x, y \in A$ tels que

$$\|x - y\| \geq diam(A) - \varepsilon$$

On considère $u = y - x$, ainsi, d'après la question précédente, il existe

$$z = x + t_0 u \in Fr(A)$$

De même pour $u' = x - y$, il existe

$$z' = x + t'_0 u' \in Fr(A)$$

En particulier $t_0 \geq 1$ car $x + u = x \in A$, donc $t_0 + t'_0 \geq 1$.

Ainsi

$$\|z - z'\| = \|t_0 u - t'_0 u'\| = (t_0 + t'_0) \|x - y\| \geq \|x - y\| \geq diam(A) - \varepsilon$$

D'où

$$diam(Fr(A)) \geq diam(A) - \varepsilon$$

Puis

$$diam(Fr(A)) \geq diam(A)$$

ce qui montre l'égalité. □