Exercice. On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Exercice. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)t^k dt = 0$$

Montrer que $f \equiv 0$.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cos(x)^n sin(x) \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère $g_n = (n + 1)f_n$.
   (a) Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Quelle est la limite de $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $]a, b[$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche