Exercice. On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Démonstration. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de fonction dérivée $f_n' : x \longmapsto -ln(n)\frac{1}{n^x}$.
2. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sum \frac{1}{n^x}$ converge comme somme de Riemann avec $x > 1$.
3. Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall x \in [a, b], |f_n'(x)| = ln(n)\frac{1}{n^x} \leq ln(n)\frac{1}{n^a}$$

   avec $\sum ln(n)\frac{1}{n^a}$ convergente par croissance comparée.
   Donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$, donc uniformément.

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation sous le sigme somme, $\zeta = \sum f_n$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de fonction dérivée $\zeta' : x \longmapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} ln(n)\frac{1}{n^x}$ □

Exercice. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)t^k dt = 0$$

Montrer que $f \equiv 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Par théorème de Weierstrass il existe une fonction polynomiale $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\int_a^b f(t)^2 dt = \int_a^b f(t)(f(t) - p(t))dt + \int_a^b f(t)p(t)dt$$

Or en notant $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, on a, par linéarité de l'intégration et l'hypothèse,

$$\int_a^b f(t)p(t)dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b f(t)t^k dt = 0$$

Ainsi

$$\int_a^b f(t)^2 dt \leq \int_a^b |f(t)||f(t) - p(t)|dt \leq \varepsilon \int_a^b |f(t)|dt$$

Puis en considérant pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, on obtient $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$, d'où, par continuité, $f \equiv 0$. □

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cos(x)^n sin(x) \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère $g_n = (n+1)f_n$.
   (a) Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Quelle est la limite de $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   Par continuité de sin en 0, il existe $\delta \in\in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [0, \delta], |sin(x)| \leq \varepsilon$$

   Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \delta], |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

   Puis

$$\forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], |f_n(x)| \leq cos(\delta)^n$$

   Or $|cos(\delta)| < 1$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

   Par conséquent

$$\forall n \geq N, \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

   Ce qui montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.
2. (a) Soit $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[\delta, \frac{\pi}{2}\right], |g_n(x)| \leq (n+1)cos(x)^n \leq (n+1)cos(\delta)^n$$

   avec $(n+1)cos(\delta)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|cos(\delta)| < 1$.
   Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)dx = [-cos(x)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$$

   Par théorème de convergence dominée (la contraposée), il n'existe pas de domination.

□

Exercice. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur un segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $]a,b[$.

Démonstration. Soit $[\alpha,\beta]\subset\,]a,b[$. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x<y$ dans $[\alpha,\beta]$, alors, par inégalité des pentes

$$\frac{f_n(a)-f_n(\alpha)}{a-\alpha}\leq\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\leq\frac{f_n(b)-f_n(\beta)}{b-\beta}$$

Or, par convergence simple, $\frac{f_n(a)-f_n(\alpha)}{a-\alpha}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{f(a)-f(\alpha)}{a-\alpha}$ et $\frac{f_n(b)-f_n(\beta)}{b-\beta}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{f(b)-f(\beta)}{b-\beta}$, donc il existe $M\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$-M\leq\frac{f_n(a)-f_n(\alpha)}{a-\alpha}\leq\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\leq\frac{f_n(b)-f_n(\beta)}{b-\beta}\leq M$$

Ainsi tous les f_n sont M-lipschitziennes sur $[\alpha,\beta]$.
Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, on considère un recouvrement fini $(x_0,...,x_r)$ de $[\alpha,\beta]$ avec un pas $\frac{\varepsilon}{3M}$.
Puis, par convergence simple, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geq N,\forall k\in[\![0,r]\!],|f_n(x_k)-f(x_k)|\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi pour $x\in[\alpha,\beta]$, il existe $k\in[\![0,r-1]\!]$ tel que $x\in[x_k,x_{k+1}]$, en particulier on a $|x-x_k|\leq\frac{\varepsilon}{3M}$, donc

$$|f_n(x)-f(x)|\leq|f_n(x)-f_n(x_k)|+|f_n(x_k)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x)|$$

$$\leq M|x-x_k|+\frac{\varepsilon}{3}+M|x_k-x|\leq\varepsilon$$

car une limite simple de fonctions M-lipschitzienne est M-lipschitzienne. $\square$