Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée.

Réponse. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f$ admet des dérivées partielles données par, pour tout $x \in U, i \in [\![1, m]\!]$ et $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$. La composée $g \circ f$ est différentiable en x de différentielle

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$$

Ainsi, en passant à la matrice jacobienne,

$$Jac(g \circ f)(x) = Jac(g)(f(x)) \times Jac(f)(x)$$

D'où, pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

$\square$

Exercice. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $f_{|S}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0, 1)$ tel que $df(x_0) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le compacte $\overline{B}(0, 1)$, donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe $x_0, x_1 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que

$$f(x_0) = \min_{x \in \overline{B}(0,1)} f(x) =: m \text{ et } f(x_1) = \max_{x \in \overline{B}(0,1)} f(x) =: M$$

Si $m = M$ alors f est constante sur $\overline{B}(0, 1)$, donc $df(x) = 0$ pour tout $x \in B(0, 1)$.
Sinon $m < M$, donc, comme f est constante S, x_0 ou x_1 n'est pas dans S. Supposons par exemple $x_0 \notin S$. Alors $x_0 \in B(0, 1)$. Donc x_0 est un point critique de f différentiable, d'où $df(x_0) = 0$. $\square$

Exercice. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & x + 2y \\ y' & = & 2x + y \end{array} \right.$

Démonstration. On note $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors le système se réécrit vectoriellement

$$Y' = AY \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = exp(tA) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ avec } x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

Or $\chi_A = (X+1)(X-3)$ scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et $Sp(A) = \{-1,3\}$. De plus $E_3(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1}(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Par conséquent les solutions de l'équation sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ avec } x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

□

Exercice. Soit U un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$. On considère $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continûment dérivable sur U, i.e.

$$\forall z \in U, \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

et f' est continue sur U.

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si u et v sont de classe C^1 sur U et vérifient les conditions de Cauchy
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
2. Montrer que si f est holomorphe et u, v de classe C^2 alors u et v sont harmoniques i.e.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Démonstration.

1. Sens direct : On suppose f holomorphe sur U. Soit $z = x + iy \in U$. Alors
$$f'(z) = \lim_{s\to 0}\frac{f(z+s)-f(z)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+s+iy)-f(x+iy)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
De même
$$f'(z) = \lim_{s\to 0}\frac{f(z+is)-f(z)}{is} = -i\lim_{s\to 0}\frac{f(x+i(y+s))-f(x+iy)}{s} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
De plus
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

Donc, par identification des parties réelles et imaginaires, les dérivées partielles de u et v sont continues, ainsi u et v sont de classe C^1, et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

<u>Sens indirect</u> : Réciproquement on suppose que u et v soient de classe C^1 et vérifient les conditions de Cauchy. Soit $z = x + iy \in U$. Or l'application f est différentiable en (x,y), donc

$$f(x+s, y+t) - f(x,y) \underset{s,t \to 0}{=} df(x,y)(s,t) + o(\|(s,t)\|)$$

$$= sdf(x,y)(1,0) + tdf(x,y)(0,1) + o(\|(s,t)\|)$$
$$= s\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + o(\|(s,t)\|)$$

Or, d'après les conditions de Cauchy, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Donc

$$f(x+s, y+t) - f(x,y) \underset{s,t \to 0}{=} s\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + it\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + o(\|(s,t)\|)$$
$$= (s+it)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + o(|s+it|)$$

Ainsi

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \underset{h \to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Donc f est dérivable en z et $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial}(x,y)$, d'où $z \longmapsto f'(z)$ est continue car u et v de classe C^1. Par conséquent f est holomorphe.

2. On a, d'après la question précédente et le lemme de Schwarz sur les dérivées partielles,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

D'où u est harmonique. On montre de même que v est harmonique.

$\square$

Question de cours. Montrer qu'un point extremal d'une application différentiable est un point critique de cette application.

Démonstration. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable. On consdière $x \in U$ un maximisant de f.
Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$df(x)(h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \leq 0$$

et

$$df(x)(h) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \geq 0.$$

Ainsi $df(x)(h) = 0$ puis $df(x) = 0$, i.e. x est un point critique de f. □

Exercice. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables telles que $exp(A) = exp(B)$. Montrer que $A = B$. Dans le cas général a-t-on exp injective ?

Démonstration. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes des matrices A et B. Ainsi il existe un polynôme $L \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L(e^{\lambda_k}) = \lambda_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. Comme A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1}AP = diag(\mu_1, ..., \mu_n) =: D$$

avec $\mu_i \in \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.
Donc

$$D = diag(L(e^{\mu_1}), ..., L(e^{\mu_n})) = L(exp(D))$$

Puis

$$A = PDP^{-1} = PL(exp(D))P^{-1} = L(Pexp(D)P^{-1}) = L(exp(A))$$

De même $B = L(exp(B))$. Donc, comme $exp(A) = exp(B)$, on en déduit que $A = B$.
Puis, dans le cas général, exp n'est pas injective. En effet

$$exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_2 = exp\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 (P(t))^3 dt. \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Démonstration. Soit $P, H \in E$. Alors

$$\phi(P+H) = \int_0^1 (P(t)+H(t))^3 dt = \phi(P) + 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt + \int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3) dt$$

avec $H \longmapsto 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t)dt$ linéaire et

$$\left|\int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3)dt\right| \leq \|H\|^2 \left(3\int_0^1 |P(t)|dt + \|H\|\right) \underset{\|H\|\to 0}{=} o(\|H\|).$$

D'où ϕ est différentiable en P et

$$\forall H \in E, d\phi(P)(H) = 3\int_0^1 (P(t))^2 H(t)dt.$$

□

Exercice. On considère $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ des points du plan $\mathbb{R}^2$ avec les x_i distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_0 x_i + \mu_0 - y_i)^2 = \min_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2.$$

Démonstration. On note $f(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$. Alors f est admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu) = 2\sum_{i=1}^n x_i(\lambda x_i + \mu - y_i) = 2\lambda\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\mu\sum_{i=1}^n x_i - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda, \mu) = 2\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i) = 2\lambda\sum_{i=1}^n x_i + 2n\mu - 2\sum_{i=1}^n y_i.$$

On suppose que (λ_0, μ_0) est un minimiseur de la fonction f. Alors, comme f est de classe C^1, (λ_0, μ_0) est un point critique de f :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0).$$

On obtient alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^n x_i y_i & = & \lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu_0 \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & = & \lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i + n\mu_0 \end{array}\right.$$

Qui se réécrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$$

Avec

$$det(A) = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \|(1,...,1)\|^2 \|(x_1,...,x_n)\|^2 - \langle(1,...,1),(x_1,...,x_n)\rangle^2 > 0$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et car les x_i sont distincts.
Ainsi le système précédent admet une unique solution (λ_0, μ_0).
De plus, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda_0+\alpha, \mu_0+\beta) - f(\lambda_0, \mu_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(((\lambda_0+\alpha)x_i + \mu_0 + \beta - y_i)^2 - (\lambda_0 x_i + \mu_0 - y_i)^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}((2\lambda_0+\alpha)x_i + 2\mu_0 + \beta - 2y_i)(\alpha x_i + \beta) = ... = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)^2 \geq 0$$

après utilisation des relations vérifiées par λ_0 et μ_0, avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ ou $x_i = -\frac{\beta}{\alpha}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ce qui est exclu. Par conséquent (λ_0, μ_0) est un minimiseur de f. $\square$

Question de cours. Montrer que la composée de deux applications différentiables est différentiable et exprimer la différentielle de la composée.

Réponse. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable et pour tout $x \in U$,

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$, alors, comme f est différentiable en x, on a

$$f(x+h) \underset{\|h\|\to 0}{=} f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)$$

Puis g est différentiable en $f(x)$ donc

$$g(f(x)+h') \underset{\|h'\|\to 0}{=} g(f(x)) + dg(f(x))(h') + o(\|h'\|)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &\underset{\|h\|\to 0}{=} g(f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h) + o(\|h\|)) + o(\|df(x)(h) + o(\|h\|)\|) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h)) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est différentiable en x et $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. □

Exercice. Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2. \end{array}$$

Montrer que l'un des points critiques n'est pas un extremum.

Démonstration. Détermination des points critiques Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ point critique de f :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y), 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$$

Ainsi, par résolution du système,

$$(x,y) \in \{(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

Etude de $(0,0)$: On a, pour x au voisinage de 0,

$$f(x,x) = 2x^4 > 0$$

et

$$f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4-x^2) < 0$$

Donc $(0,0)$ n'est pas un extremum de la fonction f. □

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction exponentielle $exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle $0 \in M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d(exp)(0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$. Montrer que φ_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ de différentielle donnée par, pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,
$$d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$
3. En déduire que la fonction exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
Indication : On pourra utiliser le théorème suivant.

Théorème. Soit $\sum \phi_k$ une série d'applications différentiables $\phi_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que la série des applications linéaires $\sum d\phi_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$ alors la fonction somme $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k$ est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ de différentielle $d\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} d\phi_k$.

Démonstration.

1. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$, alors
$$exp(0 + H) = exp(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}$$
Avec $I_n = exp(O)$ et $[H \longmapsto H] = id_{M_n(\mathbb{R})}$ linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
De plus, comme $\|\cdot\|$ est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$, on a
$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H^k\|}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = e^{\|H\|} - \|H\| - 1$$
Puis par développement limité de l'exponentielle réelle et en manipulant des o matriciels, on obtient que
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \underset{\|H\| \to 0}{=} o(\|H\|)$$
Par conséquent exp est différentiable en 0 et $dexp(0) = id_{M_n(\mathbb{R})}$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété
$$\mathcal{P}(k) : \varphi_k(A + H) \underset{\|H\| \to 0}{=} A^k + \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$
— Pour $k = 1$ on a directement
$$\varphi_1(A + H) = A + H \underset{\|H\| \to 0}{=} A + H + o(\|H\|)$$

— On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall H \in M_n(K), (A+H)^{k+1} = (A+H)^k(A+H) = \varphi_k(A+H)(A+H)$$

Donc par hypothèse de récurrence

$$\begin{array}{rcl}
(A+H)^{k+1} & \underset{\|H\|\to 0}{=} & \left(A^k + \sum\limits_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^j + o(\|H\|)\right)(A+H) \\
& = & A^{k+1} + A^kH + \sum\limits_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^{j+1} + \sum\limits_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^jH + o(\|H\|) \\
& = & A^{k+1} + A^kHA^0 + \sum\limits_{\substack{0\le i\le k-1, 1\le j\le k\\ i+j=k}} A^iHA^j + \sum\limits_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^jH + o(\|H\|) \\
& = & A^{k+1} + \sum\limits_{\substack{0\le i,j\le k\\ i+j=k}} A^iHA^j + \sum\limits_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^jH + o(\|H\|)
\end{array}$$

avec, comme $\mathbb{R}$ est un anneau commutatif,

$$\left\| \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^jH \right\| \le \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} \left\|A^iHA^jH\right\| \le \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\|^2 = \|H\|^2 k \|A\|^{k-1}$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^jH \underset{\|H\|\to 0}{=} o(\|H\|)$$

Finalement on a bien

$$\mathcal{P}(k+1) : \varphi_{k+1}(A+H) \underset{\|H\|\to 0}{=} A^{k+1} + \sum_{\substack{0\le i,j\le k\\ i+j=k}} A^iHA^j + o(\|H\|)$$

Ce qui achève la récurrence.

Par conséquent φ_k est différentiable en A de différentielle donnée par

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} A^iHA^j.$$

3. Comme $\varphi_0 = I_n$ constante, $d\varphi_0(A) = 0$.
   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \|d\varphi_k(A)(H)\| \le \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} \left\|A^iHA^j\right\| \le \sum_{\substack{0\le i,j\le k-1\\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\| = k\|A\|^{k-1}\|H\|$$

   Donc $d\varphi_k(A)$ est continue (automatique car linéaire en dimension finie) et sa norme d'opérateur vérifie

$$\|d\varphi_k(A)\| \le k\|A\|^{k-1}$$

Par conséquent $\phi_k := \frac{\varphi_k}{k!}$ est également différentiable en A et sa différentielle vérifie

$$\|d\phi_k(A)\| = \frac{\|d\varphi_k(A)\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^{k-1}}{(k-1)!}$$

Ainsi la série d'applications linéaires $\sum d\phi_k$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $L(M_n(\mathbb{R}))$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$, donc uniformément convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$.
Or $M_n(\mathbb{R})$ et $L(M_n(\mathbb{R}))$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
Ainsi, d'après le théorème, la fonction somme $exp = \sum \phi_k$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}), dexp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j \right)$$

$\square$