**Question de cours.** Soit $E$ un espace préhilbertien réel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Quelles relations a-t-on entre $F$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

**Réponse.** On a $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. De plus si $F$ et $F^{\perp}$ sont supplémentaires alors on a égalité.

*Démonstration.* Soit $x \in F$. Montrons que $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Soit $y \in F^{\perp}$. Alors, comme $x \in F$, $\langle x, y\rangle = 0$. On a donc bien $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.
On suppose de plus que $F$ et $F$ sont supplémentaires : $E = F \oplus F^{\perp}$. Soit $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Alors

$$x = y + z$$

avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Donc

$$\langle z, z\rangle = \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = 0 - 0.$$

Par conséquent $z = 0$ puis $x = y \in F$. □

**Exercice.** ** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le but de l'exercice est de montrer que l'application suivante définie un produit scalaire :

$$f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}.$$

1. Soit $x, y \in E$. Montrer que $f(2x, y) = 2f(x, y)$.
2. Soit $x_1, x_2, y \in E$. Montrer que $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$.
3. En déduire que $f(nx, y) = nf(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Conclure que $f$ définit un produit scalaire sur $E$.

*Démonstration.* L'application $f$ est symétrique définie positive. Il reste à montrer la caractère bilinéaire. Soit $x, y \in E$. Alors, par identité du parallélogramme appliquée à $x$ et $x + y$,

$$\|2x+y\|^2 + \|-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x+y\|^2),$$

et à $x$ et $y - x$

$$\|y\|^2 + \|2x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y-x\|^2).$$

Ainsi

$$f(2x, y) = \frac{1}{4}\left(\|2x+y\|^2 - \|2x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(2\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\right) = 2f(x, y).$$

Soit $x_1, x_2 \in E$, alors

$$f(x_1, y) + f(x_2, y) = \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2-\left(\|x_1-y\|^2+\|x_2-y\|^2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\|x_1+x_2+2y\|^2+\|x_1-x_2\|^2-\left(\|x_1+x_2-2y\|^2+\|x_1-x_2\|^2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\|x_1+x_2+2y\|^2-\|x_1+x_2-2y\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x_1+x_2}{2}+y\right\|^2-\left\|\frac{x_1+x_2}{2}-y\right\|^2\right)$$
$$= 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2},y\right)=f(x_1+x_2,y).$$

On en déduit donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx,y)=nf(x,y).$$

Puis

$$f(x,y)=f(x,y)+f(-x,y)-f(-x,y)=f(0,y)-f(-x,y)=-f(-x,y).$$

Ainsi

$$f(-nx,y)=nf(-x,y)=-nf(x,y).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(nx,y)=nf(x,y).$$

Puis, pour $q=\frac{n}{m}$, on a

$$f(qx,y)=f\left(n\frac{x}{m},y\right)=nf\left(\frac{x}{m},y\right)=\frac{n}{m}f(x,y)=qf(x,y),$$

avec l'antépénultième égalité justifiée par $f(x,y)=f\left(m\frac{x}{m},y\right)=mf\left(\frac{x}{m},y\right)$.
Il ne reste plus qu'à justiifer la continuité de $f$ pour pouvoir conclure, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x,y)=\lambda f(x,y).$$

En effet on a $f$ continue car

$$f(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\leq\frac{1}{4}\left((\|x\|+\|y\|)^2-(\|x\|-\|y\|)^2\right)=\|x\|\,\|y\|\,.$$

□

**Exercice.** *** Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(t\ln(t)-a-bt\right)^2dt$.

*Démonstration.* On note $f(t)=t\ln(t)$. On cherche à déterminer $d(f,\mathbb{R}_1[X])$ avec $d$ la distance sur $C^0([0,1])$ induite par le produit scalaire

$$\langle f_1,f_2\rangle=\int_0^1 f_1(t)f_2(t)dt.$$

Or $(1, t)$ forme une base de $\mathbb{R}_1[X]$. On l'orthonormalise par le procédé de Gram-Schmidt. On considère $e_1 = 1$ et $e_2 = id_{[0,1]} - \lambda e_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $\langle e_2, e_1\rangle = 0$ i.e.

$$\int_0^1 (t-\lambda) \times 1dt = 0, \text{i.e. } \lambda = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$$

Donc $(e_1, e_2)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on normalise en la base orthonormale $(v_1, v_2)$ avec $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = e_1$ et

$$v_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{id_{[0,1]} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt}} = \sqrt{12}(id_{[0,1]} - \frac{1}{2}).$$

Ainsi, comme $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie,

$$d(f, \mathbb{R}_1[X]) = \left\| f - p_{\mathbb{R}_1[X]}(f) \right\|,$$

avec

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(f) = \langle f, v_1\rangle v_1 + \langle f, v_2\rangle v_2 = \int_0^1 t\ln(t)dt + \int_0^1 t\ln(t)\sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt\sqrt{12}\left(id_{[0,1]} - \frac{1}{2}\right),$$

avec, par intégrations par parties,

$$\int_0^1 t\ln(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{t}{2}dt = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 t^2\ln(t)dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3}{3}\frac{1}{t}dt = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{t^2}{3}dt = -\frac{1}{9}$$

et

$$\int_0^1 t^2\ln(t)^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3}{3}2\ln(t)\frac{1}{t}dt = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln(t)dt = \frac{2}{27}.$$

Ainsi, après calculs, on obtient $p_{\mathbb{R}_1[X]}$ puis $d(f, \mathbb{R}_1[X])$. $\square$

**Question de cours.** Enoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

**Réponse.** Soit $E$ un espace préhilbertien réel, $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormale de vecteurs de $E$ et $x \in E$. Alors
$$\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 .$$

*Démonstration.* On considère $F = Vect(e_1, ..., e_n)$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in F$. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle = 0.$$
Donc $x - y \in F^{\perp}$, d'où, par théorème de Pythagore,
$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$
De plus, le cas d'égalité a lieu si et seulement si $x = y$, i.e. $x \in F$. □

**Exercice.** ** On considère $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $f, g \in E$,
$$\phi(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\phi$ définisse un produit scalaire sur $E$.

*Démonstration.* L'application $\phi$ est bien définie, bilinéaire, symétrique et positive. Soit $f \in E$ tel que
$$0 = \phi(f, f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)^2.$$
Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = 0.$$
Ainsi, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[0, 1]$, alors $f = 0$. Dans ce cas $\phi$ est définie ce qui montre que $\phi$ est un produit scalaire.
Réciproquement on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas dense dans $[0, 1]$. Alors il existe un intervalle $I \subset [0, 1]$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \notin I.$$
On considère $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle telle que
$$\forall x \in [0, 1] \backslash I, f(x) = 0.$$
Alors
$$\phi(f, f) = 0.$$
Ainsi $\phi$ n'est pas définie, donc n'est pas un produit scalaire sur $E$. □

**Exercice.** ** Soit $w : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt.$$

1. Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ formée de vecteurs deux à deux orthogonaux de dégré $n$ et unitaires.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_nP_{n-1}.$$

*Démonstration.*

1. On construit la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière itérative. On considère $P_0 = 1$. Alors $P_0$ est de degré 0 et unitaire. On suppose avoir construit $(P_k)_{0\leq k\leq n}$. On suppose qu'il existe $P_{n+1} \in E$ de degré $n+1$ unitaire et orthogonal à tous les $P_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$P_{n+1} = X^{n+1} + Q.$$
Or $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc il existe $(a_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$Q = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k.$$
De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$0 = \langle P_{n+1}, P_k\rangle = \langle X^{n+1}, P_k\rangle + \sum_{j=0}^{n} a_j\langle P_j, P_k\rangle = \langle X^{n+1}, P_k\rangle + a_k\langle P_k, P_k\rangle.$$
D'où nécessairement
$$P^{n+1} = X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle X^{n+1}, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle}.$$
Réciproquement $P^{n+1}$ défini par cette formule convient.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Alors, par raisonnement sur les degrés,
$$\langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = \langle P_{n+1}, Q\rangle - \langle XP_n, Q\rangle = 0 - \langle P_n, XQ\rangle = 0.$$
D'où
$$P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]^{\perp}.$$
3. Le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est degré $n$ car $P_n$ et $P_{n+1}$ sont unitaires et de degrés respectifs $n$ $n+1$. Donc, comme $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $(c_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n} c_kP_k.$$

Or $P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]^\perp$, donc, pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $c_k = 0$. Ainsi

$$P_{n+1} - XP_n = c_n P_n + c_{n-1} P_{n-1} =: a_n P_n + b_n P_{n-1}.$$

Par conséquent

$$P_{n+1} = (X + a_n) P_n + b_n P_{n-1}.$$

$\square$

**Question de cours.** Enoncer et démontrer l'égalité de Parseval-Bessel.

**Réponse.** Soit $E$ un espace préhilbertien réel, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale totale et $x \in E$. Alors la série $\sum\langle x, e_n\rangle^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2 .$$

*Démonstration.* On considère $y_N := \sum_{n=0}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n = p_{F_N}(x)$. Donc, par théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x - y_N\|^2 + \|y_N\|^2 = \|x - y_N\|^2 + \sum_{n=0}^{N}\langle x, e_n\rangle^2.$$

Or la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $z \in Vect(e_n, n \in \mathbb{N})$ tel que

$$\|x - z\| \leq \varepsilon.$$

On note $N_0 = N_0(z) \in \mathbb{N}$ tel que $z \in Vect(e_n, 0 \leq n \leq N_0)$. Ainsi, pour tout $N \geq N_0$,

$$\|x - y_N\| = d(x, Vect(e_n, 0 \leq n \leq N)) \leq d(x, Vect(e_n, 0 \leq n \leq N_0)) \leq \|x - z\| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\|x - y_N\| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle^2.$$

□

**Exercice.** Soit $p, n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. On considère $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $p$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $X_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\|AX_0 - B\| = \inf_{X\in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| .$$

2. Montrer que $X_0$ est l'unique solution de l'équation

$$^tAAX = {}^tAB$$

d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$.

3. En déduire

$$\inf_{x,y\in\mathbb{R}} \left((x + y - 1)^2 + (x - y)^2 + (2x + y + 2)^2\right) .$$

*Démonstration.*

1. $Im(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $p$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc

$$\inf_{X\in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\| = d(B, Im(A))$$

est atteint en un $AX_0 \in Im(A)$. De plus l'application linéaire

$$X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto AX \in Im(A)$$

est injective par égalité des dimensions car $A$ est de rang $p$. Par conséquent $X_0$ est unique.

2. On a $AX_0 = p_{Im(A)}(B)$, i.e.

$$\forall Z \in Im(A), AX_0 - B \perp Z,$$

i.e.

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \langle AX_0 - B, AX\rangle = 0,$$

i.e.

$$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \langle {}^tAAX_0 - {}^tAB, X\rangle = 0,$$

i.e. ${}^tAAX_0 = {}^tAB$ et de façon unique.

3. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors $rg(A) = 2$ et

$$\inf_{x,y\in\mathbb{R}} \left((x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2\right)$$

$$= \inf_{x,y\in\mathbb{R}} \left\| \begin{matrix} x+y-1 \\ x-y \\ 2x+y+2 \end{matrix} \right\|^2 = \inf_{x,y\in\mathbb{R}} \left\| A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \right\|^2.$$

Donc cette borne inférieure est atteint en un unique $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ solution de

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tAA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tAB = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

**Exercice.** ** On considère $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

On considère également le sous-espace vectoriel $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

*Démonstration.* Soit $g \in F^\perp$. Alors

$$\forall f \in F, 0 = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in F$ définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \in [-1,1] \setminus \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ -g\left(-\frac{1}{n}\right)nt & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right] \\ g\left(\frac{1}{n}\right)nt & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

Ainsi

$$\|g - f_n\|_1 = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \left| g(t) + g\left(-\frac{1}{n}\right)nt \right| dt + \int_{0}^{\frac{1}{n}} \left| g(t) - g\left(\frac{1}{n}\right)nt \right| dt,$$

avec

$$\int_{0}^{\frac{1}{n}} \left| g(t) - g\left(\frac{1}{n}\right)nt \right| dt \leq \|g\|_\infty \left( \frac{1}{n} + \int_{0}^{\frac{1}{n}} nt dt \right) = \|g\|_\infty \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et de même

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{0} \left| g(t) + g\left(-\frac{1}{n}\right)nt \right| dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\|g - f_n\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{1} f_n(t)g(t)dt = 0.$$

Donc

$$\int_{-1}^{1} g(t)^2 dt = \int_{-1}^{1} g(t)(g(t) - f_n(t))dt \leq \|g\|_\infty \|g - f_n\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent $\|g\|_2 = 0$, puis par continuité de $g$, $g = 0$. Ainsi $G^\perp = 0$. $\square$