Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée.

Exercice. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $f_{|S}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0,1)$ tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow E$ tels que

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| \, dt$$

On considère $u := \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\| dt} \int_a^b f(t)dt \in E$ et, pour tout $t \in [a,b]$,

$$f(t) = \alpha(t)u + v(t)$$

la décomposition de $f(t)$ dans la décomposition $E = Vect(u) \overset{\perp}{\bigoplus} (Vect(u))^{\perp}$.
Montrer que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = \|f(t)\| \, u$.

Exercice. Soit U un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$. On considère $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continûment dérivable sur U, i.e.

$$\forall z \in U, \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

et f' est continue sur U.

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si u et v sont de classe C^1 sur U et vérifient les conditions de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2. Montrer que si f est holomorphe et u, v de classe C^2 alors u et v sont harmoniques i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Montrer qu'un point extremal d'une application différentiable est un point critique de cette application.

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 (P(t))^3 dt. \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice. Soit E un espace préhilbertien réel et on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Soit $x, y \in E$. Montrer que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Montrer qu'il n'existe aucun produit scalaire sur $C([0,1])$ dont la norme associée est $\|\cdot\|_\infty$.
3. Même question avec la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice. On considère $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ des points du plan $\mathbb{R}^2$ avec les x_i distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_0 x_i + \mu_0 - y_i)^2 = \min_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2.$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Montrer que la composée de deux applications différentiables est différentiable et exprimer la différentielle de la composée.

Exercice. Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2. \end{array}$$

Montrer que l'un des points critiques n'est pas un extremum.

Exercice. On considère $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $f, g \in E$,

$$\phi(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définisse un produit scalaire sur E.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction exponentielle $exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle $0 \in M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d(exp)(0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$. Montrer que φ_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ de différentielle donnée par, pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$

3. En déduire que la fonction exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
   Indication : On pourra utiliser le théorème suivant.

Théorème. Soit $\sum \phi_k$ une série d'applications différentiables $\phi_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que la série des applications linéaires $\sum d\phi_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$ alors la fonction somme $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k$ est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ de différentielle $d\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} d\phi_k$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche