

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée.

Réponse. Soit U ouvert de \mathbb{R}^m , V ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f$ admet des dérivées partielles données par, pour tout $x \in U$, $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$. La composée $g \circ f$ est différentiable en x de différentielle

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$$

Ainsi, en passant à la matrice jacobienne,

$$Jac(g \circ f)(x) = Jac(g)(f(x)) \times Jac(f)(x)$$

D'où, pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

□

Exercice. On note S la sphère unité de \mathbb{R}^n . Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $f|_S$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0, 1)$ tel que $df(x_0) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le compact $\overline{B}(0, 1)$, donc, par le théorème des bornes atteintes, il existe $x_0, x_1 \in \overline{B}(0, 1)$ tel que

$$f(x_0) = \min_{x \in \overline{B}(0, 1)} f(x) =: m \text{ et } f(x_1) = \max_{x \in \overline{B}(0, 1)} f(x) =: M$$

Si $m = M$ alors f est constante sur $\overline{B}(0, 1)$, donc $df(x) = 0$ pour tout $x \in B(0, 1)$.

Si $m < M$, donc, comme f est constante sur S , x_0 ou x_1 n'est pas dans S . Supposons par exemple $x_0 \notin S$. Alors $x_0 \in B(0, 1)$. Donc x_0 est un point critique de f différentiable, d'où $df(x_0) = 0$. □

Exercice. Soit E un espace vectoriel euclidien, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow E$ tels que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt$$

On considère $u := \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\| dt} \int_a^b f(t) dt \in E$ et, pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t) = \alpha(t)u + v(t)$$

la décomposition de $f(t)$ dans la décomposition $E = Vect(u) \oplus^\perp (Vect(u))^\perp$.
Montrer que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \|f(t)\| u$.

Démonstration. Par théorème de Pythagore, on a

$$\forall t \in [a, b], \|f(t)\|^2 = \alpha(t)^2 \|u\|^2 + \|v(t)\|^2 = \alpha(t)^2 + \|v(t)\|^2 \geq \alpha(t)^2$$

D'où $\|f\| \geq \alpha$.

De plus, on a $\int_a^b v(t)dt \in Vect(u)^\perp$ car, par linéarité de l'intégration et $v(t) \in Vect(u)^\perp$,

$$\langle u, \int_a^b v(t)dt \rangle = \int_a^b \langle u, v(t) \rangle dt = 0$$

Ainsi, de l'égalité

$$\underbrace{\int_a^b \|f(t)\| dt}_{\in Vect(u)} = \int_a^b f(t) dt = \underbrace{\int_a^b \alpha(t) dt}_{\in Vect(u)} + \int_a^b v(t) dt$$

On en déduit, par somme directe,

$$\int_a^b \|f(t)\| dt = \int_a^b \alpha(t) dt, \int_a^b v(t) dt = 0.$$

Ainsi $\|f\| - \alpha$ est une fonction positive d'intégrale nulle. Par conséquent $\alpha = \|f\|$ puis $v = 0$ d'après l'égalité du théorème de Pythagore par exemple, ce qui donne finalement

$$\forall t \in [a, b], f(t) = \|f(t)\| u$$

□

Exercice. Soit U un ouvert du plan complexe \mathbb{C} que l'on identifie à \mathbb{R}^2 . On considère $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continûment dérivable sur U , i.e.

$$\forall z \in U, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

et f' est continue sur U .

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si u et v sont de classe C^1 sur U et vérifient les conditions de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2. Montrer que si f est holomorphe et u, v de classe C^2 alors u et v sont harmoniques i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Démonstration.

1. Sens direct : On suppose f holomorphe sur U . Soit $z = x + iy \in U$. Alors

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z+s) - f(z)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s+iy) - f(x+iy)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

De même

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z+is) - f(z)}{is} = -i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+i(y+s)) - f(x+iy)}{s} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

De plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

Donc, par identification des parties réelles et imaginaires, les dérivées partielles de u et v sont continues, ainsi u et v sont de classe C^1 , et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Sens indirect : Réciproquement on suppose que u et v soient de classe C^1 et vérifient les conditions de Cauchy. Soit $z = x + iy \in U$. Or l'application f est différentiable en (x, y) , donc

$$\begin{aligned} f(x+s, y+t) - f(x, y) &=_{s,t \rightarrow 0} df(x, y)(s, t) + o(\|(s, t)\|) \\ &= s df(x, y)(1, 0) + t df(x, y)(0, 1) + o(\|(s, t)\|) \\ &= s \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + o(\|(s, t)\|) \end{aligned}$$

Or, d'après les conditions de Cauchy, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x+s, y+t) - f(x, y) &=_{s,t \rightarrow 0} s \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + it \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o(\|(s, t)\|) \\ &= (s+it) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o(|s+it|) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} =_{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Donc f est dérivable en z et $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, d'où $z \mapsto f'(z)$ est continue car u et v de classe C^1 . Par conséquent f est holomorphe.

2. On a, d'après la question précédente et le lemme de Schwarz sur les dérivées partielles,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

D'où u est harmonique. On montre de même que v est harmonique.

□

Question de cours. Montrer qu'un point extrémal d'une application différentiable est un point critique de cette application.

Démonstration. Soit U ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable. On considère $x \in U$ un maximisant de f .

Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$df(x)(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \leq 0$$

et

$$df(x)(h) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \geq 0.$$

Ainsi $df(x)(h) = 0$ puis $df(x) = 0$, i.e. x est un point critique de f . □

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme et

$$\phi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt. \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Démonstration. Soit $P, H \in E$. Alors

$$\phi(P+H) = \int_0^1 (P(t)+H(t))^3 dt = \phi(P) + 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt + \int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3) dt$$

avec $H \mapsto 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt$ linéaire et

$$\left| \int_0^1 (3P(t)(H(t))^2 + (H(t))^3) dt \right| \leq \|H\|^2 \left(3 \int_0^1 |P(t)| dt + \|H\| \right) \underset{\|H\| \rightarrow 0}{=} o(\|H\|).$$

D'où ϕ est différentiable en P et

$$\forall H \in E, d\phi(P)(H) = 3 \int_0^1 (P(t))^2 H(t) dt.$$

□

Exercice. Soit E un espace préhilbertien réel et on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Soit $x, y \in E$. Montrer que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Montrer qu'il n'existe aucun produit scalaire sur $C([0, 1])$ dont la norme associée est $\|\cdot\|_\infty$.
3. Même question avec la norme $\|\cdot\|_1$.

Démonstration.

1. On a

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

et

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle.$$

D'où, par sommation des égalités,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. On suppose par l'absurde que $\|\cdot\|_\infty$ est issue d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère $f = id_{[0,1]}$ et $g = -f + 1$. Alors

$$\|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1.$$

Donc, d'après la question précédente,

$$1 + 1 = 2(1 + 1)$$

ce qui n'est pas. Par conséquent $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas issue d'un produit scalaire.

3. On suppose par l'absurde que $\|\cdot\|_1$ est issue d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère les mêmes fonctions f et g . Alors

$$\|f + g\|_1 = 1, \|f - g\|_1 = \|f\|_1 = \|g\|_1 = \frac{1}{2}.$$

Donc, d'après la question précédente,

$$1 + \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

ce qui n'est pas. Par conséquent $\|\cdot\|_1$ n'est pas issue d'un produit scalaire. □

Exercice. On considère $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ des points du plan \mathbb{R}^2 avec les x_i distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_0 x_i + \mu_0 - y_i)^2 = \min_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2.$$

Démonstration. On note $f(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$. Alors f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu) = 2 \sum_{i=1}^n x_i (\lambda x_i + \mu - y_i) = 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\mu \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda, \mu) = 2 \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i) = 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i + 2n\mu - 2 \sum_{i=1}^n y_i.$$

On suppose que (λ_0, μ_0) est un minimiseur de la fonction f . Alors, comme f est de classe C^1 , (λ_0, μ_0) est un point critique de f :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0).$$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu_0 \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i + n \mu_0 \end{cases}$$

Qui se réécrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$$

Avec

$$\det(A) = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \|(1, \dots, 1)\|^2 \|(x_1, \dots, x_n)\|^2 - \langle (1, \dots, 1), (x_1, \dots, x_n) \rangle^2 > 0$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et car les x_i sont distincts.

Ainsi le système précédent admet une unique solution (λ_0, μ_0) .

De plus, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda_0 + \alpha, \mu_0 + \beta) - f(\lambda_0, \mu_0) &= \sum_{i=1}^n (((\lambda_0 + \alpha)x_i + \mu_0 + \beta - y_i)^2 - (\lambda_0 x_i + \mu_0 - y_i)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n ((2\lambda_0 + \alpha)x_i + 2\mu_0 + \beta - 2y_i)(\alpha x_i + \beta) = \dots = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

après utilisation des relations vérifiées par λ_0 et μ_0 , avec égalité si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ ou $x_i = -\frac{\beta}{\alpha}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ce qui est exclu. Par conséquent (λ_0, μ_0) est un minimiseur de f . \square

Question de cours. Montrer que la composée de deux applications différentiables est différentiable et exprimer la différentielle de la composée.

Réponse. Soit U ouvert de \mathbb{R}^m , V ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiables. Alors $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable et pour tout $x \in U$,

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Démonstration. Soit $x \in U$, alors, comme f est différentiable en x , on a

$$f(x+h) \underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)$$

Puis g est différentiable en $f(x)$ donc

$$g(f(x)+h') \underset{\|h'\| \rightarrow 0}{=} g(f(x)) + dg(f(x))(h') + o(\|h'\|)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &\underset{\|h\| \rightarrow 0}{=} g(f(x) + df(x)(h) + o(\|h\|)) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h) + o(\|h\|)) + o(\|df(x)(h) + o(\|h\|)\|) \\ &= g(f(x)) + dg(f(x))(df(x)(h)) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est différentiable en x et $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. □

Exercice. Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 2(x - y)^2. \end{array}$$

Montrer que l'un des points critiques n'est pas un extremum.

Démonstration. Détermination des points critiques Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ point critique de f :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4(x - y), 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)$$

Ainsi, par résolution du système,

$$(x, y) \in \{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

Etude de $(0, 0)$: On a, pour x au voisinage de 0,

$$f(x, x) = 2x^4 > 0$$

et

$$f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) < 0$$

Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum de la fonction f . □

Exercice. On considère $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $f, g \in E$,

$$\phi(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définisse un produit scalaire sur E .

Démonstration. L'application ϕ est bien définie, bilinéaire, symétrique et positive. Soit $f \in E$ tel que

$$0 = \phi(f, f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)^2.$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = 0.$$

Ainsi, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[0, 1]$, alors $f = 0$. Dans ce cas ϕ est définie ce qui montre que ϕ est un produit scalaire.

Réciproquement on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas dense dans $[0, 1]$. Alors il existe un intervalle $I \subset [0, 1]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \notin I.$$

On considère $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle telle que

$$\forall x \in [0, 1] \setminus I, f(x) = 0.$$

Alors

$$\phi(f, f) = 0.$$

Ainsi ϕ n'est pas définie, donc n'est pas un produit scalaire sur E . □

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction exponentielle $exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle $0 \in M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d(exp)(0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) & \mapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^k \end{matrix}$. Montrer que φ_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ de différentielle donnée par, pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$

3. En déduire que la fonction exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.

Indication : On pourra utiliser le théorème suivant.

Théorème. Soit $\sum \phi_k$ une série d'applications différentiables $\phi_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que la série des applications linéaires $\sum d\phi_k$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^m alors la fonction somme $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k$ est différentiable sur \mathbb{R}^m de différentielle $d\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} d\phi_k$.

Démonstration.

1. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\exp(0 + H) = \exp(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}$$

Avec $I_n = \exp(O)$ et $[H \mapsto H] = id_{M_n(\mathbb{R})}$ linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

De plus, comme $\|\cdot\|$ est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H^k\|}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = e^{\|H\|} - \|H\| - 1$$

Puis par développement limité de l'exponentielle réelle et en manipulant des o matriciels, on obtient que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \underset{\|H\| \rightarrow 0}{=} o(\|H\|)$$

Par conséquent \exp est différentiable en 0 et $d\exp(0) = id_{M_n(\mathbb{R})}$.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \varphi_k(A + H) \underset{\|H\| \rightarrow 0}{=} A^k + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$

— Pour $k = 1$ on a directement

$$\varphi_1(A + H) = A + H \underset{\|H\| \rightarrow 0}{=} A + H + o(\|H\|)$$

— On suppose le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall H \in M_n(K), (A + H)^{k+1} = (A + H)^k (A + H) = \varphi_k(A + H)(A + H)$$

Donc par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} (A + H)^{k+1} &\underset{\|H\| \rightarrow 0}{=} \left(A^k + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j + o(\|H\|) \right) (A + H) \\ &= A^{k+1} + A^k H + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^{j+1} + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\ &= A^{k+1} + A^k H A^0 + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \\ &= A^{k+1} + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H + o(\|H\|) \end{aligned}$$

avec, comme \mathbb{R} est un anneau commutatif,

$$\left\| \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \right\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \|A^i H A^j H\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\|^2 = \|H\|^2 k \|A\|^{k-1}$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j H \underset{\|H\| \rightarrow 0}{=} o(\|H\|)$$

Finalement on a bien

$$\mathcal{P}(k+1) : \varphi_{k+1}(A+H) \underset{\|H\| \rightarrow 0}{=} A^{k+1} + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k \\ i+j=k}} A^i H A^j + o(\|H\|)$$

Ce qui achève la récurrence.

Par conséquent φ_k est différentiable en A de différentielle donnée par

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$

3. Comme $\varphi_0 = I_n$ constante, $d\varphi_0(A) = 0$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \|d\varphi_k(A)(H)\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \|A^i H A^j\| \leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} \|A\|^{i+j} \|H\| = k \|A\|^{k-1} \|H\|$$

Donc $d\varphi_k(A)$ est continue (automatique car linéaire en dimension finie) et sa norme d'opérateur vérifie

$$\|d\varphi_k(A)\| \leq k \|A\|^{k-1}$$

Par conséquent $\phi_k := \frac{\varphi_k}{k!}$ est également différentiable en A et sa différentielle vérifie

$$\|d\phi_k(A)\| = \frac{\|d\varphi_k(A)\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^{k-1}}{(k-1)!}$$

Ainsi la série d'applications linéaires $\sum d\phi_k$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $L(M_n(\mathbb{R}))$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$, donc uniformément convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Or $M_n(\mathbb{R})$ et $L(M_n(\mathbb{R}))$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Ainsi, d'après le théorème, la fonction somme $\exp = \sum \phi_k$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}), d\exp(A)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j \right)$$

□