Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques.

Réponse. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$. Alors u est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est symétrique.

Démonstration. Soit b une base orthonormée de E et $A = Mat_b(u) \in M_n(\mathbb{R})$.
Sens direct : On suppose que u est symétrique. Alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$A_{ji} = \langle \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k, b_j \rangle = \langle u(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, u(b_j) \rangle = \langle b_i, \sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k \rangle = A_{ij}.$$

Donc A est symétrique.
Sens indirect : On suppose que A est symétrique. Soit $x, y \in E$. Alors

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle u(b_i), b_j \rangle,$$

avec, pour tout $i, j [\![1, n]\!]$,

$$\langle u(b_i), b_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k, b_j \rangle = A_{ji} = A_{ij} = \langle b_i, u(b_j) \rangle.$$

D'où $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ ce qui montre que u est symétrique. □

Exercice. * Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = id_E$. Montrer que $u^2 = id_E$.

Démonstration. D'après le théorème spectral, la matrice D de u dans une base orthonormée est diagonale. Comme $u^p = id_E$, on a $D^p = I_n$. Ainsi les valeurs diagonales de D sont racines de $X^p - 1$, et réelles, donc appartiennent à $\{-1, 1\}$. D'où $D^2 = I_n$ puis $u^2 = id_E$. □

Exercice. ** Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Démonstration.

1. Or u est symétrique, donc, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Ainsi, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associés,

$$0 = tr(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(e_i) \rangle.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\sum_{j=1}^{n}e_j, u(e_i)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\langle e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0,$$

avec $x := \sum_{j=1}^{n} e_j \neq 0$ car la famille est libre.

2. On raisonne par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ le résultat est clair. On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n \geq 2$. On considère $y = \frac{x}{\|x\|}$, $F = Vect(y)$ et $G = F^{\perp}$. Or $dim(G) = n-1$, donc il existe une base orthonormée $(y_2, ..., y_n)$ de G. Ainsi la matrice symétrique de u dans la base $(y, y_2, ..., y_n)$ s'écrit, comme $u(y) \in F^{\perp} = G$, $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$, avec $B \in S_{n-1}(\mathbb{R})$. On considère v l'endomorphisme sur G dont la matrice dans la base $(y_2, ..., y_n)$ est donnée par B. Alors $tr(v) = tr(u) - 0 = 0$ et v est symétrique. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée de G dans laquelle la matrice de v est de coefficients diagonaux nuls. Par conséquent en concaténant y avec cette base, on obtient une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale de coefficients diagonaux nuls.

$\square$

Exercice. ** Soit M une matrice symétrique d'ordre n dont tous les coefficients sont positifs.

1. Montrer que l'on peut définir

$$\alpha = \sup\{\langle X, MX\rangle, X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$$

et qu'il s'agit une valeur propre de M.

2. Montrer que M admet un vecteur propre à coordonnées toutes positives et associé à une valeur propre positive.

Démonstration.

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ de norme égale à 1. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle MX, X\rangle| \leq \|MX\|\,\|X\| \leq \|M\|\,\|X\|^2 = \|M\|$$

donc le supremum est bien défini.
Il est de plus atteint car l'application $X \mapsto \langle MX, X\rangle$ est continue et le supremum est fait sur le compact $S(0,1)$ fermé bornée en dimension finie.
Comme pour toute valeur propre λ de M, et tout vecteur propre unitaire X associé à λ, on a

$$\langle MX, X\rangle = \lambda.$$

On en déduit que α est plus grand que les valeurs propres de M. Il est de plus égal à une valeur propre. En effet, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonomée de vecteurs propres de M (existe par théorème spectral) et $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres associées commptées avec multiplicité, ordonnées de la façon suivante

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

Alors en considérant $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de norme unitaire, on obtient

$$\langle MX, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1,$$

avec égalité si et seulement si X est un vecteur propre de valeur propre λ_1.
Par conséquent $\alpha = \lambda_1$.

2. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $|X|$ le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs absolues des coordonnées du vecteur X. Soit $X \in E_{\lambda_1}(M)$ de norme unitaire, l'inégalité triangulaire nous donne
$$0 \leq |\alpha| = |\langle MX, X\rangle| \leq \langle M|X|, |X|\rangle \leq \alpha$$
car $|X|$ reste de norme 1.
On en déduit
$$\langle M|X|, |X|\rangle = \alpha$$
et donc, par le cas d'égalité de la question précédente, $|X|$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = \alpha \geq 0$.

$\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème spectral.

Réponse. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$ symétrique. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ le résultat est clair. On suppose le résultat vrai dans les espaces de dimension $n-1$. Comme u est symétrique il admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet son polynôme caractéristique admet une racine $\lambda \in \mathbb{C}$, donc, si on note A la matrice de u dans une base de E, il existe $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Ainsi

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = {}^t(\lambda x)\overline{x} = {}^t(Ax)\overline{x} = {}^tx^tA\overline{x} = {}^txA\overline{x} = {}^tx\overline{\lambda}\overline{x} = \overline{\lambda}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2.$$

Donc $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère ensuite e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ et $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$. Alors H est stable par u : pour tout $x \in H$, on a

$$\langle u(x), e_1\rangle = \langle x, u(e_1)\rangle = \lambda\langle x, e_1\rangle = 0,$$

et $v := u_{|H} \in L(H)$ est symétrique : pour tout $x, y \in H$, on a

$$\langle v(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle x, v(y)\rangle.$$

De plus $dim(H) = n-1$, donc, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, ..., e_n)$ de H diagonalisant v. Par conséquent $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E diagonalisant u. $\square$

Exercice. ** Soit A une matrice réelle symétrique de taille n positive i.e.

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \langle Az, z\rangle \geq 0.$$

On considère l'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ définie par

$$g(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \right)$$

1. Montrer que si A est inversible alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $g(y)$ appartient à $\mathbb{R}$ et est égal à $\frac{1}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle$.
   Indication : On pourra calculer $\langle A^{-1}(y - Ax), y - Ax\rangle$.
2. Dans le cas général, montrer qu'on a

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\langle x_0, y\rangle & \text{où } Ax_0 = y, \text{ si } y \in \mathrm{Im}(A) \\ \\ +\infty & \text{si } y \notin \mathrm{Im}(A) \end{cases}$$

Démonstration.

1. Supposons A inversible. On utilise l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\langle A^{-1}(y-Ax), y-Ax\rangle &= \langle A^{-1}y, y\rangle - \langle A^{-1}y, Ax\rangle - \langle x, y\rangle + \langle x, Ax\rangle \\ &= \langle A^{-1}y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle x, Ax\rangle\end{aligned}$$

   obtenue grâce à l'identité $\langle A^{-1}y, Ax\rangle = \langle x, y\rangle$ par symétrie de A.
   Comme A est positive, on obtient

$$\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle = \frac{1}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle - \frac{1}{2}\underbrace{\langle A^{-1}(y-Ax), y-Ax\rangle}_{\geq 0} \leq \frac{1}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle.$$

   Ainsi

$$g(y) = \frac{1}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle,$$

   atteint en $x = A^{-1}y$ par exemple.
2. Soit $y \in \mathbb{R}^n$.
   Si $y \notin \mathrm{Im}(A) = \ker(A)^{\perp}$ (car A est symétrique), donc il existe $x_0 \in \mathrm{Ker}(A)$ tel que

$$\langle y, x_0\rangle > 0.$$

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_\lambda := \lambda x_0$. Alors

$$\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax_\lambda, x_\lambda\rangle = \lambda\langle x_0, y\rangle - 0,$$

   i.e.

$$g(y) \geq \lambda\langle x_0, y\rangle.$$

   D'où $g(y) = +\infty$.
   Si $y \in \mathrm{Im}(A)$ alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Ax_0$. Donc, comme à la question 1,

$$\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle = \frac{1}{2}\langle x_0, y\rangle - \frac{1}{2}\langle x_0 - x, y - Ax\rangle \leq \frac{1}{2}\langle x_0, y\rangle.$$

   D'où

$$g(y) = \frac{1}{2}\langle x_0, y\rangle.$$

□

Exercice. **

1. Soit A une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont positives et k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que A et A^k admettent les mêmes sous-espaces propres.
2. Soient A et B deux matrices symétriques positives tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = B^k$. Montrer que $A = B$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A.
   Alors $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_r^k$ sont des valeurs propres distinctes de A^k : soit $i \in [\![1, r]\!]$. Alors il existe $x_i \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $Ax_i = \lambda_i x_i$. Ainsi

   $$A^k x_i = A^{k-1} A x_i = \lambda_i A^{k-1} x_i = ... = \lambda_i^k x_i.$$

   Notons E_i et $E_i^{(k)}$ les sous-espaces propres associés aux valeurs propres respectives λ_i de A et λ_i^k de A^k. On a, par le même calcul précédent, $E_i \subseteq E_i^{(k)}$ et par théorème spectal et caractérisation de la diagonalisabilité on a

   $$\bigoplus_{i=1}^{r} E_i = \mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i^{(k)}.$$

   Ainsi

   $$\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\dim(E_i)}_{\leq \dim(E_i^{(k)})} = \sum_{i=1}^{r} \dim(E_i^{(k)}).$$

   Donc, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

   $$\dim(E_i) = \dim(E_i^{(k)}).$$

   Ainsi on obtient, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

   $$E_i = E_i^{(k)}.$$

   Par conséquent A et A^k admettent les mêmes sous-espaces propres.
2. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

   $$A^k = B^k.$$

   D'après ce qui précède, A et B ont les mêmes sous-espaces propres :

   $$\forall i \in [\![1, r]\!], E_i(A) = E_i^{(k)}(A) = E_i^{(k)}(B) = E_i(B).$$

   De plus, pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $x_i \in E_i(A) = E_i(B)$, on a

   $$Ax_i = \lambda_i x_i = Bx_i.$$

   Ainsi $A = B$.

□

Question de cours. Enoncer le théorème de réduction des isométries vectorielles.

Réponse. Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormée b de E telle que

$$Mat_b(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

Exercice. *** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que l'application $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, i.e. une application continue bijective de bijection réciproque continue.

1. Montrer que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$. On rappelle que

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXAX > 0\}.$$

2. Montrer la continuité de exp sur $M_n(\mathbb{R})$. En déduire la continuité de exp sur $S_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $exp(A) = exp(A')$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(exp(A'))$. En déduire que A et A' sont co-orthodiagonalisables, i.e. orthodiagonalisable dans la même base orthonormée, puis que $A = A'$.
5. On considère $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (Im(exp))^{\mathbb{N}} = (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B = exp(A) \in Im(exp) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$. On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S) \text{ appelé rayon spectral.}$$

   (b) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

   En déduire que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue.

Démonstration.
Etape 1 : $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors, d'après le théorème spectral, S est orthogonalement diagonalisable, donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1} = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^tP.$$

Ainsi, par continuité et passage à la limite,

$$exp(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1})^k = Pexp(Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n))^tP = PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^tP.$$

Donc ${}^t exp(S) = exp(S)$, d'où $exp(S) \subset S_n(\mathbb{R})$.
Puis pour $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, comme ${}^t P \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\langle X, exp(S)X \rangle = \langle {}^t PX, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) {}^t PX \rangle = \langle Y, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})Y \rangle$$

en notant $Y = PX \neq 0$.
D'où

$$\langle X, exp(S)X \rangle = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} y_i^2 > 0.$$

Ainsi $exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ce qui montre que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.
<u>Etape 2 : Continuité</u>
La fonction exp est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. En effet la série fonctionnelle $\sum \frac{1}{k!} A^k$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$ et les fonctions $A \longmapsto \frac{1}{k!} A^k$ sont continues sur $M_n(\mathbb{R})$. Donc, par restriction, $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est également continue.
<u>Etape 2 : Surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$</u>
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors, par théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que

$$B = PDiag(\mu_1, ..., \mu_n) {}^t P.$$

Or $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijectif, donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, e^{\lambda_i} = \mu_i$.
On considère donc

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P$$

pour avoir $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $exp(S) = B$ ce qui montre la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
<u>Etape 3 : Injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$</u>
Soit $(A, A') \in (S_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $exp(A) = exp(A')$. Ainsi, comme précédemment,

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P.$$

De plus, en considérant $(\lambda'_1, ..., \lambda'_m)$ les λ_i distincts, les $(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_m})$ sont distincts par injectivité de l'exponentielle réelle, donc il existe un polynôme interpolateur de Lagrange $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, m]\!], Q(e^{\lambda'_i}) = \lambda'_i$.
Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!], Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i.$$

Alors

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P = PDiag(Q(e^{\lambda_1}), ..., Q(e^{\lambda_n})) {}^t P = Q(exp(A)) = Q(exp(A')).$$

D'où $AA' = A'A$ ie A et A' commutent.
Or, par théorème spectral, A et A' sont orthodiagonalisables, donc A et A' sont orthodiagonalisables dans une même base orthonormée, i.e. il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda'_1, ..., \lambda'_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n) {}^t P, A' = PDiag(\lambda'_1, ..., \lambda'_n) {}^t P.$$

D'où

$$PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) {}^t P = exp(A) = exp(A') = PDiag(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_n}) {}^t P$$

Ainsi
$$\forall i \in [\![1,n]\!], e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}.$$
Puis, par injectivité de l'exponentielle réelle, $A = A'$ ce qui montre l'injectivité de exp : $S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Etape 4 : Continuité de $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$
Utilisons la caractérisation séquentielle de continuité : Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ et $B = exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que
$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B.$$
Sous-étape a : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée
Comme la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$.
De même, par continuité du passage à l'inverse, la suite $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B^{-1}, donc elle est également bornée pour $\|\cdot\|_2$.
Or pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, on a
$$\|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S).$$
Ainsi, il existe $(C, C') \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall p \in \mathbb{N}, max(Sp(B_p)) \subset]0, C], max(Sp(B_p^{-1})) \subset]0, C'].$$
Or $max(Sp(B_p^{-1})) = min(Sp(B_p))^{-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc
$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(B_p) \subset [C'^{-1}, C] \subset]0, +\infty[$$
Puis
$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(A_p) = ln(Sp(B_p)) \subset [ln(C'^{-1}), ln(C))] \subset \mathbb{R}$$
Donc la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$.
Sous-étape b : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'admet qu'une valeur d'adhérence
Soit $A' \in S_n(\mathbb{R})$ et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que
$$A_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A'$$
Donc, par continuité de exp :
$$B_{\varphi(p)} = exp(A_{\varphi(p)}) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} exp(A')$$
D'où, par unicité de la limité, $exp(A) = exp(A')$, puis, par injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = A'$.
Sous-étape c : Conclusion
Ainsi, comme $S_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, $A_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$ ce qui montre que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue. $\square$

Exercices supplémentaires

Exercice. On dit qu'une matrice symétrique A est définie positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ et $\langle Ax, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$. Notons E l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n. Soit $A = (a_{ij}) \in E$.

1. Montrer que pour tous $\gamma_1, \dots \gamma_n$ dans $\mathbb{R}^*$, on a $B = (\gamma_i \gamma_j a_{ij}) \in E$.
2. Montrer que $(\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(A)$ et en déduire
$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$
3. Soit $C \in E$ tel que $\det(C) = 1$. Montrer qu'on a
$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(AC)$$
Quels sont les C pour lesquels il y a égalité ?
4. Montrer enfin
$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq (\det(A + C))^{\frac{1}{n}}$$
pour tout $C \in E$.

Démonstration.

1. On a $B = DAD$ où $D = \operatorname{diag}(\gamma)$ et le reste en découle.
2. On utilise l'inégalité de la moyenne pour la première inégalité. Puis on applique l'inégalité obtenue à B défini en 1., avec $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$, pour trouver $\det(B) \leq 1$ et enfin l'inégalité voulue.
3. Comme C définit un produit scalaire, on écrit $C = {}^t\Delta\Delta$ où Δ est une matrice de passage entre deux bases orthogonales. On note de plus $F = \Delta A\, {}^t\Delta$ de telle sorte qu'on ait $AC = {}^t\Delta F \Delta$. Comme $\det(AC) = \det(AC)$ et $\operatorname{Tr}(AC) = \operatorname{Tr}(F)$, on obtient en appliquant l'inégalité précédente à F,
$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(AC)$$
Il y a égalité si $F = \alpha I_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, c-à-d $C = (\det(A))^{\frac{1}{n}} A$.
4. L'inégalité voulue est équivalente à
$$\left(\det(AC^{-1})\right)^{\frac{1}{n}} + 1 \leq \left(\det(AC^{-1} + I_n)\right)^{\frac{1}{n}}$$
Posons un peu comme précédemment, $C^{-1} = {}^t\Delta\Delta$ et $F = {}^t\Delta A \Delta$. Alors l'inégalité recherchée est équivalente à
$$(\det(F))^{\frac{1}{n}} + 1 \leq (\det(F + I_n))^{\frac{1}{n}}$$

soit encore à

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}+1\leq\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

où les λ_i désignent les valeurs propres de F. En passant aux logarithmes et aux exponentielles, cela équivaut encore à

$$\ln\left[1+\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda_i)\right)\right]\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\exp(\ln(\lambda_i)))$$

Comme la fonction $x\mapsto\ln(1+\exp(x))$ est strcitement convexe, l'inégalité est assurée. De plus, l'égalité n'a lieu que si tous les λ_i sont égaux, c-à-d si $F=\alpha I_n$ avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

$\square$